

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН

# **ТРУДЫ НИИСИ РАН**

ТОМ 2 N 2

**ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
ВИЗУАЛИЗАЦИЯ:**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ**

МОСКВА  
2012

**Редакционный совет НИИСИ РАН:**

В.Б. Бетелин (председатель),  
О.М. Белоцерковский, Е.П. Велихов, В.А. Галатенко, В.Б. Демидович (отв. секретарь),  
П.П. Кольцов, Б.В. Крыжановский, А.Г. Кушниренко, А.Г. Мадера, М.В. Михайлюк,  
В.Я. Панченко, В.П. Платонов, В.Н. Решетников

**Главный редактор журнала:**

В.Б. Бетелин

**Научные редакторы тома:**

П.П. Кольцов, М.В. Михайлюк

**Тематика номера:**

Математическое моделирование, визуализация,  
информационные технологии и приложения

Журнал публикует оригинальные статьи по следующим областям исследований:  
математическое и компьютерное моделирование, обработка изображений, визуализация,  
системный анализ, методы обработки сигналов, информационная безопасность,  
информационные технологии, высокопроизводительные вычисления, микроэлектронная  
элементная база

**The topic of the issue:**

Mathematical modeling, Visualization,  
Information Technology and Applications

The Journal publishes novel articles on the following research areas: mathematical and computer modeling, system analysis, image processing, visualization, signal processing, information security, information technologies, high-performance computing, microelectronic component base

Заведующий редакцией: Ю.Н.Штейников

Издатель: Российская академия наук, НИИСИ РАН,  
117218, Москва, Нахимовский проспект 36, к.1

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математическое моделирование в физике

- А.В. Коганов.* Транзитивные области влияния (индукторные пространства) в трех задачах математической физики и теории больших систем ..... 4
- А.Л. Круглый.* Динамика последовательного роста ориентированного ациклического бинарного графа..... 26
- А.С. Лосев.* Гомотопические уравнения Маурера-Картана в физике ..... 38

### Математическое моделирование и визуализация

- А.В. Мальцев, М.В. Михайлюк.* Метод высоко реалистичной совмещенной визуализации 3D сцен в реальном времени ..... 44
- М.В. Михайлюк, А.М. Трушин.* Расчет коллизий параллелепипедов в задачах динамики. .... 51
- П.Ю. Тимохин.* Моделирование рассветного и закатного освещения в космических видеотренажерах..... 59

### Моделирование в микро и наноэлектронике

- В. А. Горячев.* Особенности работы полосковых линий связи КМОП микропроцессоров с переменной нагрузкой ..... 62
- П.И. Кандалов, А.Г. Мадера.* Моделирование 3D-температурных полей электронных систем: программный комплекс STF-ElectronMod ..... 67
- Н.В. Масальский.* Пороговые характеристики КНИ КМОП нанотранзисторов с высокой диэлектрической проницаемостью подзатворного диэлектрика ..... 70

### Информационные технологии и приложения

- С.В. Мацыкин, В.В. Осипов, С.Б. Савилкин.* Применение концепции виртуальных систем для решения задач оптических траекторных измерений ..... 77
- Д.А. Кононов, А.А.Кочкаров, Н.О. Пономарев.* Стойкость сложных технических систем: сценарный взгляд на проблему..... 80
- А.В. Захаров, П.П. Кольцов, Н.В. Котович, А.А. Кравченко, А.С. Куцаев, А.С. Осипов.* Критерии оценки качества сегментации изображений.....87
- Ю.М. Лазутин, Г.А. Чертов, А.В. Родиков, В.А. Рогожкин.* Средства и методы интеграции бортового программного обеспечения.....100

# Транзитивные области влияния (индукторные пространства) в трёх задачах математической физики и теории больших систем

А. В. Коганов

*кандидат физико-математических наук.*

Рассматриваются три задачи теории распределённых процессов, решение которых можно получить, используя транзитивность областей влияния в пространстве, на котором определён физический процесс. Первоначально эти задачи возникли в математической физике, но впоследствии аналогичные вопросы возникли и в других областях математического моделирования и теории больших систем. 1. Устанавливаются необходимые и достаточные топологические условия наличия полной системы инвариантов в математической модели процесса. 2. Выводится уравнение диффузии в форме, согласованной с ограничением на скорость распространения проникающей субстанции. В частности, для физики это означает согласованность с теорией относительности. Классическое уравнение диффузии предполагает наличие сколь угодно больших скоростей частиц и не является релятивистским. 3. Предлагается несколько строгих методов перехода в макроскопическом пределе от дискретных моделей, процессов определённых на графах, к непрерывным топологиям пространства-времени.

## Введение

В статье рассмотрены три известные проблемы из области математической физики и системного анализа.

Исследована возможность описания процессов в системе с помощью системы инвариантов в фазовом пространстве системы.

Предложена одна из моделей процессов диффузионного типа, которая согласована с требованиями ограничения скорости распространения. Это требование возникает, например, в теории относительности, в процессах биофизики и экономики.

Рассмотрен вопрос о переходе от процессов, определённых на дискретных (комбинаторных) пространствах из класса графов, к их непрерывным аналогам на топологических моделях пространства-времени. Последняя задача известна в физике как проблема макроскопического предела для дискретных систем взаимодействий. Но подобные проблемы возникают также при моделировании экологических, биологических, социальных, экономических и других типов больших систем.

В каждом из этих направлений удалось получить определенное продвижение, благодаря использованию топологических методов, заимствованных из аппарата теории моделей распределённых процессов. Такие модели возникают при изучении сложных систем с большим числом компонент, взаимодействующих друг с другом. К ним относятся как пространственно-временные физические процессы, так и информационные сети, биологические организмы и сообщества, технические комплексы и экономические системы. Одним из методов моделирования таких объектов является построение специальных топологий — индукторных пространств, которые моделируют ту пространственную структуру, на которой естественно описывать исследуемый процесс. Эти пространства описывают области влияния на каждый из элементов

системы, состоящие из других элементов той же системы, включая и источники внешних воздействий на систему. Главным свойством таких областей является транзитивность влияния. Оно состоит в том, что элементы системы могут передавать по цепочке воздействие на некоторый объект, входящий в систему (элемент или совокупность элементов). Единственное, что для этого требуется, это чтобы каждый элемент цепочки входил в область влияния следующего за ним элемента цепочки. Таким образом, правильно описанная система областей влияния должна быть замкнута относительно операции расширения областей влияния по таким цепочкам. Это свойство положено в основу определения класса индукторных пространств. Он включает в себя как классические топологии всех типов, так и все виды графов, включая бесконечные, и пространства, которые не могут быть описаны как классические топологии или графы, но имеют интерпретацию в реальных системах взаимодействия.

Подробно теоретический аппарат индукторных пространств изложен в работах [3.1],[3.2],[3.3]. В приложениях обычно достаточно описать конструкцию нужного пространства, после чего задача решается средствами специальных разделов математики применительно к построенному индукторному пространству. В этом смысле индукторные пространства дают удобный аппарат для полезных дополнительных построений и позволяют давать строгие формулировки исходных содержательных прикладных задач. Для удобства читателя ниже приводится определение необходимых понятий теории и формулировки теорем, которые дают мотивировку применения этого аппарата в рассмотренных задачах.

Рассмотрим содержательную интерпретацию. Если задана реальная система, элементы которой обмениваются сигналами, веществом или энергией (далее — сигналы), то каждый элемент системы

характеризуется набором подмножеств элементов, которые своими сигналами в совокупности

Один элемент может иметь несколько таких подмножеств (областей влияния, индукторов). В этом случае реакция элемента должна быть согласована по сигналам из разных индукторов, и это накладывает ограничение на совокупность возможных состояний всей системы. В математической модели удобно иметь расширение системы, рассматривая в качестве разных элементов образы одного элемента в разные моменты времени. Такое расширение системы называется пространством-временем исходной системы, а его элементы — точками пространства времени или элементарными событиями. Каждое такое событие выражает тот факт, что некоторый элемент системы в данный момент времени имеет определённое состояние. В такой модели состояние точки пространства-времени уже не меняется, и весь процесс записан как набор состояний всех точек.

Классическим примером такого расширения может служить график движения некоторого материального объекта, нарисованный в осях пространства (пройденный путь  $x$ ) и времени  $t$ . Плоскость графика интерпретируется как пространство-время процесса. Событие в точке  $(t, x)$  фиксирует наличие объекта в данной точке пути  $x$  в данный момент времени  $t$ , если график проходит через эту точку, или отсутствие объекта в этих координатах, если график проходит вне этой точки. Область зависимости нового элемента (точки пространства-времени) расположена в прошлом по оси времени. При этом для механического движения состояние точки можно описать, зная состояния точек в сколь угодно малой окрестности этой точки. Поэтому у точки имеется бесконечно много разных областей зависимости. Эти области удовлетворяют условию транзитивности в том смысле, что произвольную область зависимости данной точки можно расширить, объединив её с областью зависимости любой входящей в неё точки. Это требование легло в основу общего понятия индукторного пространства. Оно значительно слабее классической аксиоматики топологии, и, соответственно, класс таких пространств шире класса классических топологий. Общее строгое определение индукторного пространства не связано с каким либо определённым реальным процессом, а задаётся набором аксиом.

**Определение 1.** Отношением индукции  $I$  на множестве  $T$  называется множество элементов вида  $(x, v) \sim I$ ,  $x \in T$ ,  $v \subset T$ ,  $I$  — обозначение конкретного отношения. Разные отношения индукции отличаются как *носителем*  $T$  так и составом элементов индукции  $(\dots) \sim I$ . Подмножество  $v$  называется *индуктором* точки  $x$  и элемента индукции; точка  $x$  называется *центром индуктора*  $v$  и элемента индукции. Индуктор может иметь более одного центра, а точка иметь более одного индуктора. Возможны точки без индукторов. *Множество*

определяют эволюцию состояния данного элемента.

*индукторов* точки  $x$  в отношении индукции  $I$  обозначим  $I(x) = \{V \mid (x, V) \sim I\}$ .

Отношение индукции образует *индукторное пространство*  $[T, I]$  и называется *индукцией* на  $T$ , если оно удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Аксиома принадлежности точки своему индуктору:  $(x, v) \sim I \Rightarrow x \in v$ .

2. Аксиома транзитивного объединения: если центр одного элемента индукции принадлежит индуктору другого элемента индукции, то объединение индукторов этих элементов является индуктором центра второго элемента индукции.

$$(x, v) \sim I, (y, w) \sim I, y \in v \Rightarrow (x, v \cup w) \sim I.$$

Полным индуктором  $\varphi\{x\}$  точки  $x$  называется объединение всех индукторов этой точки. По определению он включается в число индукторов точки.

**Утверждение 1.** Из любого отношения индукции  $I$  на  $T$  можно породить индукторное пространство  $[T, B]$  оператором  $space(I) = B$ , который определен как индуктивный предел следующих рекуррентных преобразований.

*Первый шаг:*

$$B =_{def} \{(x, v \cup \{x\}) \sim B \mid (x, v) \sim I\};$$

*Далее, рекуррентно:*

$$B =_{rec} \{(x, v \cup w) \sim B \mid (x, v) \sim B, (y, w) \sim B, y \in v\}$$

Заметим, что на каждом шаге, начиная со второго, сохраняются все индукторы, построенные на предыдущем шаге. Это видно из формулы

$$y = x, w = v, (y, w) \sim B \Rightarrow$$

$$y \in v, (x, v) \sim B = (x, v \cup w) \sim B,$$

*Заключительный шаг:* (после бесконечной рекуррентной итерации)

$$B =_{rec} B \cup \{(x, (\cup v \mid (x, v) \sim B)) \sim B \mid x \in T\} \\ = B \cup \{(x, \varphi(x)) \sim B \mid x \in T\}$$

На этом шаге гарантировано каждая точка получает полный индуктор.

**Утверждение 2.** Любой ориентированный граф может быть описан как индукторное пространство, где порождающим отношением индукции является сопоставление вершине графа (как точке) в качестве индуктора 1-окрестность по входящим рёбрам.

**Утверждение 3.** Любое топологическое пространство может быть описано как индукторное пространство, если в качестве индукторов точки рассмотреть открытые множества, которые её содержат. Кроме того, топологии можно сопоставить индукцию, в которой индукторами точки будут только связанные открытые множества, содержащие эту точку. В обоих случаях можно добавлять к индукторам их границу, если этого требует конструкция модели.

**Определение 2.** Коническим индукторным пространством  $Rc[n, 1]$  называется индукторное пространство  $[\mathbb{R}^{n+1}, I]$ , в котором:

1. носителем является линейное пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$ ;

2. имеется базис  $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ , в котором полный индуктор любой точки  $(x_0, \dots, x_n)$  имеет вид конуса

$$\varphi\{(x_0, \dots, x_n)\} = \{(y_0, \dots, y_n) \mid y_0 \leq x_0, (y_0 - x_0)^2 - (y_1 - x_1)^2 - \dots - (y_n - x_n)^2 \geq 0\}$$

3. группа автоморфизмов отношения индукции  $[x, \varphi\{x\}] \sim I_o$  совпадает с группой автоморфизмов отношения индукции  $I$ .

Если индукторы такого пространства являются открытыми множествами по Евклиду или их замыканиями (возможно частичными), и каждый индуктор точки содержит пересечение некоторого шара, имеющего центр в этой точке, и конуса её полного индуктора, то назовём такое индукторное пространство *стандартным* коническим.  $\square$

Заметим, что на элементы индукции, отличные от полных индукторов, в определении накладывается достаточно свободное ограничение. Системы индукторов могут существенно отличаться в разных конических пространствах (соответствующие им отношения индукции будут не изоморфны). Поэтому, даже при фиксированной размерности, определение выделяет нетривиальный класс пространств. Размерность пространства определяется как  $\dim Rc[n, 1] = n + 1$ .

Условие  $y_0 \leq x_0$  интерпретируется как условие направления причинности по времени  $t = x_0$  из прошлого в будущее. Полный индуктор обеспечивает влияние на состояние точки только из прошлого для любого процесса, согласованного по областям влияния с конической индукцией. Кроме такой индукции можно задать коническую индукцию с обратным направлением времени, задав условие  $y_0 \geq x_0$ , или задав биконическую индукцию  $Rb[n, 1]$ , убрав ограничение на  $y_0$ . В последнем случае мы допускаем обратимость времени в моделях процесса.

**Теорема 1.** Если размерность  $n + 1 \geq 3$ , то группа автоморфизмов отношения конической индукции  $Rc[n, 1]$  совпадает с аффинной подгруппой группы Пуанкаре (преобразования Лоренца, дилатации и сдвиги в указанных координатах) [3.1]. Если зафиксировать единичный вектор по оси  $x_0$ , то исчезают дилатации. Тогда единственной инвариантной квадратичной метрикой такой группы является метрика Минковского.

**Замечание 1.** Для биконической индукции  $Rb[n, 1]$  при размерности  $\dim Rb[n, 1] \geq 3$  группа

автоморфизмов содержит еще подгруппу второго порядка, которая действует как изменение знака времени. Для инвариантности метрики Минковского при этом не требуется дополнительно фиксировать направление времени, поскольку эта метрика инвариантна относительно такого преобразования.

Этих данных достаточно для понимания данной статьи, а их подробное изложение дано в указанной литературе.

Статья разбита на три части, соответствующие разным задачам математической физики. Решение каждой из них не использует материалы из других задач. Поэтому в каждой части используется независимая нумерация формул и теорем. Список литературы имеет двойную нумерацию с указанием номера части статьи. Нумерация рисунков сквозная. Общий для всех частей аппарат транзитивного отношения индукции (индукторных пространств) в необходимом объеме изложен во введении.

## Часть 1. Точные топологические условия существования полного набора инвариантов процесса и принципа наименьшего действия

Процесс характеризуется пространством состояний и законом, который связывает попарно состояния как совместимые в одной реализации.

Понятие обобщенной траектории процесса или подмножества совместимых состояний. Это множество всех состояний, которые могут встретиться в одной реализации процесса. Точнее, вместе с каждым состоянием оно содержит все состояния, которые могут встретиться вместе с ним в одной реализации процесса в соответствие с законом совместимости.

Обозначения и определения.

$F(x, y)$  — отношение парной совместимости состояний процесса. Это действительная функция двух переменных на пространстве всех состояний процесса.

$F(x, y) = 0$  — означает, что состояния  $x, y$  совместимы в одной реализации.

Свойства, обязательные для отношения парной совместимости.

*Рефлексивность:*  $F(x, x) = 0$ .

*Коммутативность:*  $F(x, y) = F(y, x)$ .

Свойства, возможные для отношения парной совместимости.

*Транзитивность:*

$$F(x, y) = F(y, z) = 0 \Rightarrow F(x, z) = 0.$$

*Инвариант процесса* — это функция от состояния процесса, которая принимает одно значение на каждой из обобщенных траекторий (далее — траектории).

*Полный инвариант процесса* — это инвариант, который принимает разные значения на разных траекториях.

*Принцип наименьшего действия.*

Скажем, что процесс удовлетворяет принципу наименьшего действия, если его можно описать следующей конструкцией. Обозначим множество всех

состояний  $T$ . На множестве состояний задано индукторное пространство  $[T, I]$  с индукцией  $I$ , причём  $\varphi(x) = T$  для любого состояния  $x \in T$ . Класс подмножеств, которые являются траекториями процесса, обозначим  $C_F$ . Каждая траектория может быть определена как  $P(x) = \{y \mid F(x, y) = 0\}$ . Точка  $x \in T$  называется опорным состоянием этой траектории. Возможно совпадение траекторий для разных опорных состояний. Кроме того, имеется более широкий класс подмножеств  $C_p$ , который назовём классом гипотетических траекторий,  $C_F \subset C_p$  — обязательное условие. Обозначим  $C(x) = \{P \mid P \in C_p, x \in P\}$ .

Назовём действием функционал типа  $U: I \times C_p \rightarrow \mathbb{R}$ , определённый на кортежах  $\langle x, v, P \rangle$ , где  $x \in T, v \subset T, (x, v) \sim I, P \in C(x)$  и сопоставляющий каждому кортежу некоторое число, для которого верны следующие утверждения.

1d.  $U(x, v, P) = u(x, v \cap P)$  (значение зависит только от части траектории в индукторе).

2d. Для каждого элемента индукции  $(x, v) \sim I$  при условии  $v \cap P \neq v \cap P(x)$  выполнено неравенство  $U(x, v, P) > U(x, v, P(x))$  (в индукторе строго минимальное значение соответствует траектории процесса).

Если функционал действия можно задать для данного процесса, то траекторию процесса с любым опорным состоянием можно определить как такую гипотетическую траекторию, на которой минимизируется действие в каждом индукторе,

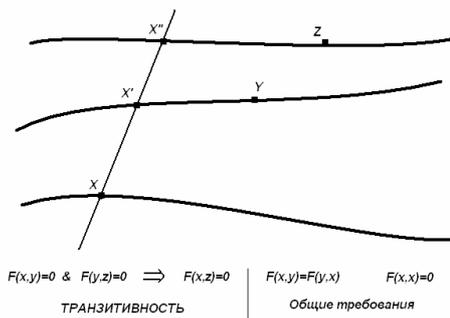


Рис. 1. Если траектории образуют расслоение в фазовом пространстве, то точки пересечения секущей со всеми слоями задают полный инвариант траектории процесса. Для фазовой точки  $Y$  значение инварианта —  $X'$ , а для точки  $Z$  инвариант равен  $X''$ .

который она пересекает. В этом случае скажем, что процесс удовлетворяет принципу наименьшего действия.

Пояснение. Термин «действие» и принцип наименьшего действия был введён в механике. В качестве функционала действия используется интеграл от лагранжиана по траектории во времени. В качестве

гипотетических траекторий при этом рассматриваются все гладкие кривые в фазовом пространстве-времени  $T$  механической системы. А индукция сопоставляет каждой точке пространства  $T$  индукторы, состоящие из всех состояний, попадающих в заданный интервал времени вокруг данной точки. Это позволяет искать локальный минимум действия средствами вариационного исчисления. Предложенный выше формализм позволяет обобщить принцип на все процессы, которые корректно описаны траекториями в пространстве состояний и, возможно, во времени. Требование локального минимума заменено требованием глобального минимума на траектории для упрощения конструкции и без потери общности теорем.

**Теорема 1.** Процесс имеет полный инвариант, если и только если отношение парной совместимости рефлексивно, коммутативно и транзитивно.

Доказательство. Указанный набор свойств означает, что множества совместимых состояний не пересекаются попарно. На множестве всех состояний они образуют разбиение. Для каждого разбиения существует функция, определенная на точках пространства состояний, которая постоянна на элементах разбиения и различна на точках из разных элементов разбиения. Например, можно в каждом элементе разбиения выбрать одну точку и получить, таким образом, множество выделенных точек. Тогда значением инварианта в произвольной точке будет та единственная выделенная точка, которая с ним совместима. По построению это — полный инвариант. (См. рисунок 1.) Если две траектории пересекаются, то любой инвариант траектории принимает на каждой из этих траекторий то значение, которое он имеет в точке их пересечения. Поэтому он не может различать эти траектории. (См. рисунок 2.) Значит, полный инвариант в таком процессе невозможен.  $\square$

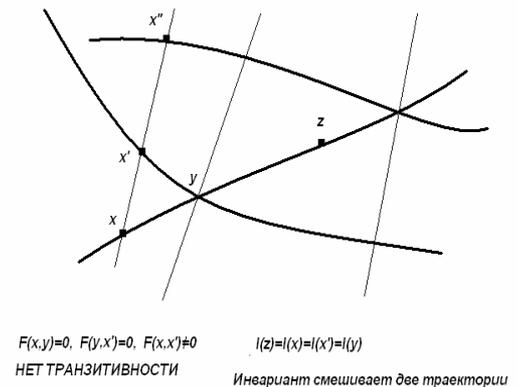


Рис. 2. Траектории пересекаются, и любой инвариант будет иметь одинаковые значения в точках  $x, x', x'', y, z$ , которые лежат на разных траекториях.

**Теорема 2.** Если процесс имеет полный инвариант, и только тогда, процесс удовлетворяет принципу наименьшего действия.

Доказательство. Класс гипотетических траекторий  $C_p$  может быть определён для любого процесса,

например, как  $C_P = C_F$ . Аналогично, всегда можно задать индукцию, например, вида  $(x, T) \sim I$  для всех  $x \in T$ . (Заметим, что возможны и более широкое множество гипотетических траекторий и более сложная индукция, выбранные из содержательных прикладных соображений; доказательство не зависит от выбора этих параметров.) Пусть имеется полный инвариант процесса. Из теоремы 1 следует, что траектории образуют разбиение пространства состояний. Зададим функционал действия в форме

$$U(x, v, P) = \sup \{ F^2(x, y) \mid y \in v \cap P \} \quad (1)$$

Очевидно, что на траектории процесса этот функционал обнуляется  $U(x, v, P(x)) = 0$ , и это минимально возможное значение. А поскольку траектории не пересекаются, то ядро обнуляется только на траектории опорного состояния  $x$ . Для всех остальных гипотетических траекторий имеется хотя бы одна точка  $y \in P$ , для которой  $F(x, y) \neq 0$ , и следовательно,  $F^2(x, y) > 0$ ,  $U(x, v, P) > 0$ .

Если же некоторые траектории пересекаются,  $y \in P(x) \cap P(x')$ ,  $P(x) \neq P(x')$ , что означает отсутствие транзитивности отношения совместимости, то функционал, имеющий тип действия, не выделяет одной траектории, хотя и минимизируется на траектории. Действительно, в точке пересечения действие должно дать минимум на обеих траекториях.  $U(y, v, P(x)) = U(y, v, P(x')) = \min$ , что нарушает условие 2d для обеих траекторий. Это доказывает необходимость транзитивности отношения совместимости (а по теореме 1 — наличия полного инварианта траектории) для реализации принципа наименьшего действия.  $\square$

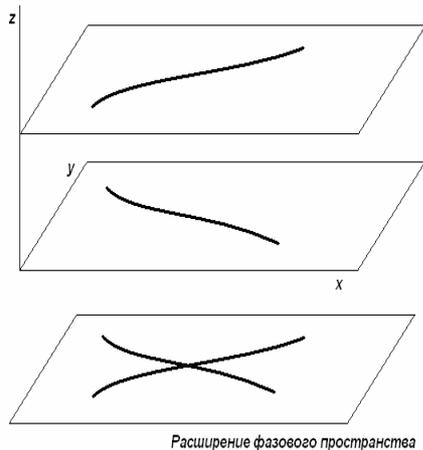


Рис. 3. Введение дополнительной координаты  $z$  разводит пересекающиеся траектории.

**Замечание 1.** Если модель процесса не обеспечивает транзитивности отношения парной совместимости фазовых точек, то ситуацию можно исправить путём введения дополнительной координаты в фазовом пространстве. При этом всем точкам одной траектории приписывается одно значение этой дополнительной координаты, а на

разных пересекающихся траекториях это значение выбирается различным. В таком фазовом пространстве траектории уже не пересекаются, а значение по дополнительной координате является компонентой полного инварианта. (См. рисунок 3.) Этот метод в теоретической физике интерпретируется как введение специальных зарядов для моделируемых объектов. В частности, так введены барионный заряд и система кварковых зарядов в теории элементарных частиц. Обычно, дополнительно предполагается аддитивность этого заряда по совокупности частиц, участвующих в процессе. Это не вносит противоречия, поскольку физические процессы с разным составом частиц не имеют общих траекторий в пространстве состояний.

Рассмотрим случай, когда пространство состояний линейное размерности  $n$ , а отношение совместимости гладкое. Тогда любой гладкий  $k$ -мерный инвариант траектории удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^i} G_j(x) = a(x) \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, y) \Big|_{y=x}; \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k.$$

для некоторой гладкой функции  $a(x)$ . Это означает, что градиент инварианта коллинеарен градиенту отношения совместимости, и на траектории его полный дифференциал равен нулю. Другая форма записи этого уравнения через скалярное произведение

$$\frac{\partial}{\partial x^i} G_j(x) * \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, y) \Big|_{y=x} = \sqrt{\left( \frac{\partial}{\partial x^i} G_j(x) \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, y) \Big|_{y=x} \right)^2} \quad (3)$$

Для механических систем, которые описываются сохранением функции Лагранжа  $L$  от координат

$q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ , имеющей однопараметрическую группу инвариантности  $g^s$ , инварианты можно строить по теореме Э. Нётер (1918) [1.1][1.2].

$$I = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{ds} g^s(q_i) \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Такие инварианты не всегда образуют полную систему. Предложенный выше метод позволяет пополнить систему инвариантов. Кроме того, можно вводить описание процессов самой разнообразной природы, включая информационные, биологические или экономические, через законы сохранения специально выбранных параметров.

## Часть 2. Уравнение диффузии с учетом свободного пробега частиц

Исследуется вопрос о построении релятивистки согласованного уравнения теплопроводности и диффузии. Проблема связана с тем, что классическое уравнение термодинамики противоречит некоторым принципам теории относительности. Рассмотрим

классическое уравнение диффузии, одномерный случай.

$$\frac{\partial}{\partial t} u \Big|_{t,x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial}{\partial x} u \right) \Big|_{t,x} \quad (1)$$

В этом уравнении предельная скорость диффузии (перемещения частиц) неограниченна (бесконечна). Это следует из того, что функция Грина уравнения (1) положительна на всей прямой при любом положительном значении параметра времени. Так, в однородном случае  $u_t = au_{xx}$  при  $A(t, x) = a = const$  функция Грина имеет форму (см. например [2.1-4])

$$G(t, x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ \frac{-x^2}{2a^2 t} \right\}.$$

Для преодоления этого свойства попробуем учесть реальные интервалы свободного пробега частиц в пространстве и времени. Для этого введём непрерывное пространство-время граф, соответствующий сети для явной разностной схемы уравнения диффузии. Шаг по пространству будет соответствовать длине свободного пробега, а шаг по времени — времени свободного пробега. Такую сеть проведём через каждую точку пространства  $\langle t, x \rangle$ .

Рёбра имеют вид  $((t, x), (t + \tau, x \pm \lambda))$ . Если у двух сетей есть одна общая точка, то они совпадают полностью. Поэтому на пространстве возникает кроме топологии Эвклида ещё и индукция по графу сети. Этот граф будем считать ориентированным таким образом, что каждое ребро направлено в сторону роста координаты времени.

Этот граф распадается на континуум связанных компонент, которые не соединяются рёбрами. На каждом из этих графов может происходить свой процесс, определённый как решение явной разностной схемы. Гладкость объединённого процесса на всём непрерывном пространстве в этом случае обеспечивается только гладкостью начальных данных и граничных условий.

Но есть возможность построить дифференциальное уравнение, порождённое этой разностной схемой с заданными конечными шагами по времени и пространству. При этом для описания процесса будет использована как разностная схема, так и непрерывное дифференцирование функций на пространстве  $\langle t, x \rangle$ .

(См. рисунок 4.) Оказывается, при учёте второго члена разложения приращений в ряде Тейлора возникает новое уравнение диффузии, содержащее волновую компоненту.

Учтем интервал свободного пробега частицы в среднем:

$$\Delta x = \lambda; \quad \Delta t = \tau; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} = \\ = A(t, x + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x + \lambda} - A(t, x - \lambda) \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x - \lambda} \end{aligned} \quad (3)$$

Если решение и коэффициент диффузии имеют три непрерывные производные, то

$$\begin{aligned} u(t + \tau, x) - u(t, x) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \tau^2 + O(\tau^3) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A(t, x + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x + \lambda} - A(t, x - \lambda) \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x - \lambda} = \\ = 2\lambda \left( \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} u + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \Big|_{t, x} + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (5)$$

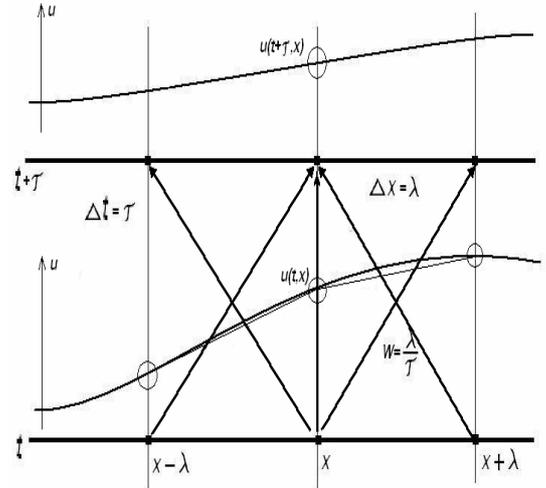


Рис. 4. Сетевая индукция на непрерывной плоскости. Показаны ребра графа и две смежные гладкие кривые концентрации диффузии с хордами конечных разностей.

Предположим, что параметры  $\lambda, \tau$  достаточно малы, чтобы пренебречь третьим порядком. Тогда из (3-5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \\ = \left( \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} u + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \Big|_{t, x} \end{aligned} \quad (6)$$

Это уравнение диффузии с учетом конечности свободного пробега. Оно содержит волновую компоненту (вторая производная по времени и по пространству). Другая форма:

$$u_t(t, x) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(t, x) = A_x(t, x) u_x + A(t, x) u_{xx}(t, x) \quad (7)$$

Для однородного коэффициента диффузии  $A(t, x) = a = const$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \Big|_{t, x} \quad (8)$$

Параметр  $\frac{\lambda}{\tau} = w$  можно рассматривать как условную скорость свободного пробега. (Она не является среднестатистической, поскольку отношение средних величин не совпадает со средним отношением

этих величин.) Фактически, он исключается и остаётся только время свободного пробега. Уравнение диффузии (6) можно записать в форме

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \left( \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} u + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \Big|_{t, x} - \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \quad (9)$$

Поэтому однородное уравнение (8) эквивалентно

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{2}{\tau} \left( a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \Big|_{t, x} - \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right) \quad (10)$$

В компактной форме

$$\tau u_{tt} = 2(A_x u_x + A u_{xx} - u_t) \quad (9a)$$

$$\tau u_{tt} = 2(a u_{xx} - u_t) \quad (10a)$$

Для анализа удобна другая форма однородного уравнения:

$$u_{tt} + \frac{2u_t}{\tau} = \frac{2a}{\tau} u_{xx} \quad (11)$$

Из (11) видно, что при неограниченном росте времени свободного пробега частиц и одновременном росте коэффициента диффузии по закону  $a = \tau b / 2$ , уравнение приближается к волновому

$$u_{tt} = b u_{xx} \quad (12)$$

При убывании времени свободного пробега до нуля с сохранением коэффициента диффузии уравнение (10a) сходится к классической диффузии

$$u_t = a u_{xx} \quad (13)$$

Рассмотрим вопрос о возможности получения релятивистской инвариантности уравнения (11). Для этого надо получить связь среднего времени свободного пробега и коэффициента диффузии так, чтобы в однородном случае результирующий коэффициент при операторе Лапласа был инвариантен относительно преобразований Лоренца. Обозначим  $2a / \tau = b$ , или

$$a = \tau b / 2. \quad (14)$$

В этом случае уравнение (11) приобретает форму

$$u_{tt} - b u_{xx} + \frac{2}{\tau} u_t = 0 \quad (15)$$

Рассмотрим диффузию в штрихованной системе отсчёта, которая движется относительно исходной системы наблюдателя со скоростью  $v$ . Обозначим  $\beta = v / c$ . Преобразования Лоренца дают такие соотношения:

$$\begin{aligned} (u_t)' &= u_t \sqrt{1 - \beta^2}; \\ (\lambda')^2 &= \lambda^2 (1 - \beta^2); \\ \tau' &= \tau (1 - \beta^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Наблюдаемая условная скорость пробега частицы

$$w' = \lambda' / \tau' = w (1 - \beta^2) \quad (17)$$

Заметим, что среднестатистическая скорость пробега частиц относительно центра масс среды, меняется по другой формуле, которая определяется усреднением релятивистского закона сложения

скоростей отдельных частиц и скорости системы отсчёта.

Из уравнений (16) и (14) получаем

$$a' = \frac{a}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (18)$$

Но тогда не инвариантен коэффициент при  $u_t$ .

Таким образом, можно обеспечить инвариантность только волновой части уравнения, предположив изменение (18) наблюдаемого коэффициента диффузии. Само по себе уравнение (18) плохо согласовано с теорией размерности, поскольку  $[a] = [L]^2 [T]^{-1}$ , и ожидаемое преобразование

$$a' = a (1 - \beta^2)^{3/2}. \quad (19)$$

Видимо, требование инвариантности уравнения диффузии в СТО не выполнимо. Но тогда можно потребовать релятивистской согласованности этого уравнения с постулатами СТО. Это означает, что распространение диффузии идёт с субсветовыми скоростями во всех системах отсчёта.

Для условной и средней скорости свободного пробега это условие выполнено в силу уравнения (17) и закона сложения скоростей в СТО соответственно. Если в неподвижной системе отсчёта  $w < c$ , то это сохранится и в подвижной системе.

Коэффициенты как волновой, так и диффузионной составляющей уравнения (15) в подвижной системе отсчёта меньше, чем в неподвижной системе. Это видно из преобразований (16) и (19). Поэтому, если максимальная скорость фронта диффузии ограничена скоростью света в неподвижной системе отсчёта, то это ограничение сохранится и в подвижной системе. Скорость фронта диффузии определяется ростом во времени пространственного носителя функции Грина, которая выражает распространение диффузии из такого начального состояния, в котором вся диффундирующая субстанция сосредоточена в одной точке.

Уравнение (15) — это уравнение волны с трением гиперболического типа. Область распространения функции Грина такого уравнения определяется конусом, ограниченным поверхностью характеристик. В соответствии с общей теорией [5] для уравнения в плоскости  $\langle t, x \rangle$  вида

$$A u_{tt} + C u_{tx} + B u_{xx} = F(t, x, u, u_t, u_x)$$

характеристики определяются решением уравнения

$$A dx^2 - C dt dx + B dt^2 = 0.$$

Уравнение характеристик для уравнения (15)

$$dx^2 - b dt^2 = 0 \quad (20)$$

Это уравнение поверхности конуса, определённого неравенством

$$dx^2 - b dt^2 \geq 0$$

**Замечание 1.** Обнуление функции Грина вне конуса характеристик следует из того, что для гиперболического уравнения в частных производных выполнено условие единственности решения граничной задачи Коши, а нулевое решение

удовлетворяет нулевым исходным данным. Во все точки вне конуса с вершиной в точке, относительно которой задана функция Грина, входят характеристики только от точек с нулевыми начальными данными.

Как показано выше, для согласованности с СТО необходимо и достаточно выполнение условия  $b \leq c^2$ , где  $c$  — скорость света. Из определения (14) это условие можно выразить через физические параметры процесса

$$b = 2a / \tau \leq c^2 \quad (21)$$

**Теорема 1.** Чтобы уравнение диффузии с учётом свободного пробега частиц было согласовано с релятивизмом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$0 \leq a \leq c^2 \tau / 2 \quad (22)$$

(доказано выше).

Из этой теоремы следует, в частности, что при сокращении времени свободного пробега уменьшается и диапазон допустимых значений коэффициента диффузии в системе отсчёта среды диффузии (коэффициент диффузии покоя).

**Теорема 2.** Если среда диффузии находится в системе отсчёта, которая движется относительно наблюдателя с равномерной скоростью  $v$ , то диапазон допустимых наблюдаемых значений коэффициента диффузии определяется формулой

$$0 \leq a' \leq c^2 \tau (1 - \beta^2)^{3/2} / 2 \quad (23)$$

Это следует из формулы преобразования (19) и из принципа относительности, в соответствии с которым наблюдаемая диффузия в системе отсчёта среды диффузии должна удовлетворять диапазону (22), не зависимо от того, с какой скоростью движется эта среда относительно наблюдателя.

**Замечание 2.** Наблюдаемое время свободного пробега в подвижной среде возрастает по формуле (16), но это не влияет на оценку (23) диапазона коэффициента диффузии. Это следует из того, что формула (22) должна выполняться во всех системах отсчёта.

$$0 \leq a' \leq c^2 \tau / 2 \quad (24)$$

используя уравнения (16)(19) получаем

$$0 \leq 2(1 - \beta^2)^{1/2} a' \leq c^2 \tau$$

$$0 \leq 2a(1 - \beta^2)^2 \leq c^2 \tau$$

А из принципа относительности для формул (22)(19) получаем более сильное условие, которое соответствует теореме 2:

$$0 \leq 2a'(1 - \beta^2)^{-3/2} \leq c^2 \tau$$

Таким образом, диапазон (23) оказывается внутри диапазона (24), а поскольку требуются оба ограничения, то оценка (24) не влияет на окончательный результат.

**Замечание 3.** Полученная граница возможных значений коэффициента диффузии значительно превосходит реальные значения в изучаемых процессах, что, видимо, и является причиной отсутствия в классической теории соответствующих

ограничений. Например, если время свободного пробега имеет порядок микросекунды, то граница (22) в системе МКСА имеет порядок  $10^{16} \cdot 10^{-6} = 10^{10} (m^2 s^{-1})$ . Характерные значения коэффициентов диффузии и теплопроводности имеют порядки ниже  $10^3$ . Оценка (23) существенно сжимает диапазон только при скоростях, близких к скорости света. Такие наблюдения начались только недавно в дальней астрономии. Возможно, для далёких объектов оценку (23) удастся проверить.

**Замечание 4.** Если рассмотреть в качестве модели исходное уравнение в конечных разностях (3), то становится очевидным сосредоточенность функции Грина в конусе с образующими векторами  $(a\lambda, \tau)$  и  $(-a\lambda, \tau)$ . Такая модель соответствует замене уравнений (4)(5) на бесконечный ряд Тейлора. В этом случае уравнения (7) и (8) заменяются уравнениями бесконечного порядка, имеющими вид бесконечного ряда дифференциальных мономов. В качестве начальных данных такого уравнения надо задавать распределение концентрации  $u(0, x)$  и все производные  $u_{t \dots t}(0, x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ; . В другом варианте можно задать начальные данные в полосе  $u(t, x)$ ,  $-\tau \leq t \leq 0$ ;  $-\infty < x < \infty$ ; , что позволяет решать как уравнение дифференциального ряда, так и непосредственно разностную схему. В обоих вариантах надо обеспечить достаточную гладкость задаваемых функций. Для дифференциального ряда необходимо иметь непрерывные частные производные всех порядков. Для разностной схемы формальное решение возможно из произвольных данных в полосе, но физический смысл схема имеет только при непрерывных частных производных до второго порядка.

**Замечание 5.** С точки зрения адекватности разностной модели её физической интерпретации — процессу диффузии — важно исследовать условие устойчивости разностной схемы (3). Если параметры свободного пробега частиц  $\lambda, \tau$  выбраны (или измерены) так, что разностная схема неустойчива, то решение будет содержать колебания с неограниченно нарастающей во времени амплитудой в каждой точке области распространения процесса. Это означает, что в некоторых точках значения концентрации будут отрицательны:  $u(x, t) < 0$ , что не адекватно физической интерпретации. В таких решениях закон сохранения массы (или сохранения тепловой энергии)  $\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = m(t) = m = const$  выполняется за счет компенсации сколь угодно больших положительных значений концентрации соответственными по величине отрицательными значениями. Наличие отрицательных значений концентрации означает, что при снижении концентрации до значений, близких к нулю, уравнение реального процесса становится нелинейным, и распространение диффузии становится солитоном в этой области. Таким образом, требование устойчивости уравнения (3) означает условие

правомерности линейной модели процесса диффузии или термодинамики.

**Лемма 1.** Уравнения (3) и (9) на классе функций из класса  $C_3(\mathbb{R})$  (наличие трёх непрерывных производных) в однородном случае эквивалентно явной разностной схеме уравнения диффузии (1) с шагами по времени  $\tau$  и по пространству  $\lambda$  и с увеличенным в два раза коэффициентом диффузии. В общем случае явная схема соответствует дифференциальному уравнению

$$\tau u_{tt} = 2A_x u_x + A u_{xx} - 2u_t \quad (C1)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3) и его решение на точках сети с шагами  $\tau$  и  $\lambda$ . Рассмотрим разностные оценки производных по пространству:

$$u_x(t, x - \lambda) \simeq \frac{u(t, x) - u(t, x - \lambda)}{\lambda};$$

$$u_x(t, x + \lambda) \simeq \frac{u(t, x + \lambda) - u(t, x)}{\lambda}.$$

Используя гладкость функции запишем разложение с точностью до третьего порядка:

$$u(t, x + \lambda) = u(t, x) + u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2/2;$$

$$u(t, x - \lambda) = u(t, x) - u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2/2;$$

$$u_x(t, x - \lambda) \simeq \frac{u_x(t, x)\lambda - u_{xx}(t, x)\lambda^2/2}{\lambda};$$

$$u_x(t, x + \lambda) \simeq \frac{u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2/2}{\lambda};$$

Явная разностная схема уравнения (3)

$$\begin{aligned} 2\lambda \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} &= \\ &= A(t, x + \lambda) \frac{u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2/2}{\lambda} - \\ &- A(t, x - \lambda) \frac{u_x(t, x)\lambda - u_{xx}(t, x)\lambda^2/2}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 (u(t + \tau, x) - u(t, x)) &= \\ &= \tau \left( (A(t, x + \lambda) - A(t, x - \lambda)) u_x(t, x)\lambda + \right. \\ &\left. + (A(t, x + \lambda) + A(t, x - \lambda)) u_{xx}(t, x)\lambda^2/2 \right) \end{aligned}$$

Сделаем разложение в ряд

$$A(t, x + \lambda) = A(t, x) + A_x(t, x)\lambda + A_{xx}(t, x)\lambda^2/2 + O(\lambda^3)$$

$$A(t, x - \lambda) = A(t, x) - A_x(t, x)\lambda + A_{xx}(t, x)\lambda^2/2 + O(\lambda^3)$$

Используя эти уравнения и разложение (4), получим

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \right) &= \\ &= 2A_x(t, x)\lambda^2 u_x(t, x) + A(t, x)\lambda^2 u_{xx}(t, x) + O(\tau\lambda^3) \end{aligned}$$

Пренебрегая членом порядка  $\tau\lambda$ , получим дифференциальное уравнение (C1), которое соответствует явной разностной схеме. Записав

уравнение (9а) в форме  $\tau u_{tt} = 2A_x u_x + 2A u_{xx} - 2u_t$ , можно видеть, что в нём отличается от (C1) только коэффициент диффузии (в два раза больше), но при этом его пространственная производная входит без соответствующего масштабирования. Поэтому в неоднородном случае уравнения (C1) и (9а) не переводятся друг в друга масштабированием коэффициента диффузии. Однако в однородном случае его производная обнуляется и явная разностная схема соответствует дифференциальному уравнению

$$\tau u_{tt} = a u_{xx} - 2u_t \quad (C2)$$

Это уравнение отличается от уравнения (10а) только уменьшением вдвое коэффициента диффузии.  $\square$

**Теорема 3.** Требование устойчивости разностной схемы (3) эквивалентно дополнительному ограничению на коэффициент диффузии

$$a < 2\lambda^2 / \tau, \quad (25)$$

$$A(t, x - \lambda) + A(t, x + \lambda) < 4\lambda^2 / \tau \quad (26)$$

соответственно в однородном и в общем случае.

Доказательство. Рассмотрим однородный случай. Следуя лемме 1 можно рассмотреть схему (3) как явную разностную. Тогда можно использовать для анализа её устойчивости требование уменьшения амплитуды единичного возмущения с треугольным профилем на сети пространства-времени за один шаг схемы.

$$2\lambda \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} = a \left( \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x + \lambda} - \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x - \lambda} \right) \quad (27)$$

$$u(t + \tau, x) = \frac{a\tau}{2\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x + \lambda} - \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x - \lambda} \right) + u(t, x) \quad (28)$$

Рассмотрим в точке  $(t, x)$  единичное возмущение с треугольным профилем на ближайших  $\lambda$ -интервалах:

$$u(t, x') = \begin{cases} 1, & x' = x; \\ \frac{\lambda}{x' - x}, & x < x' < x + \lambda; \\ \frac{\lambda}{x - x'}, & x - \lambda < x' < x; \\ 0, & x' < x - \lambda \vee x + \lambda < x'; \end{cases} \quad (29)$$

Условие устойчивости можно сформулировать для этого начального состояния (29) с односторонними производными на краях  $\lambda$ -интервалов:

$$|u(t + \tau, x)| < |u(t, x)| \quad (30)$$

Уравнение (28) в этом случае даёт

$$u(t + \tau, x) = \frac{a\tau}{2\lambda} \left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) + 1 = -\frac{a\tau}{\lambda^2} + 1$$

Требование (30) в этом случае означает

$$-\frac{a\tau}{\lambda^2} + 1 > -1$$

Это эквивалентно уравнению (25).

Рассмотрим общий не однородный случай. Применим начальные условия (28) и требование (30) для уравнения динамики (3).

$$\frac{2\lambda}{\tau}(u(t+\tau, x)-1) = -\frac{A(t, x+\lambda)}{\lambda} - \frac{A(t, x-\lambda)}{\lambda}$$

$$1 - \tau \frac{A(t, x+\lambda) + A(t, x-\lambda)}{2\lambda^2} > -1$$

Это эквивалентно уравнению (26).  $\square$

**Теорема 4.** При совместном рассмотрении требований релятивистской согласованности и устойчивости однородного уравнения (10) границы допустимых значений коэффициента диффузии зависят от соотношения параметров свободного

пробега: при  $\lambda < \frac{c}{2}\tau$  требуется (25), а в противном случае требуется (22).

Это следует из того, что требуется выполнение обеих указанных верхних оценок, и достаточно потребовать выполнения более сильного неравенства. При малых значениях отношения  $\lambda/\tau$  сильнее требование устойчивости, а при больших — требование релятивистской согласованности.  $\square$

### Часть 3. Генерация графа в метрическом пространстве и переход к топологии в макроскопическом пределе

#### 1. Содержательная постановка проблемы

В современной математической физике имеется направление моделирования физических процессов на пространствах дискретной природы, когда у каждой точки можно указать одну или несколько ближайших к ней точек. Однако при попытке дать такое описание для механических процессов возникает проблема несоответствия групп симметрии в непрерывном и дискретном пространстве (например [3.8]). Для преодоления этой трудности обычно вводятся нестрогие предложения рассматривать дискретное пространство «в больших масштабах» с интуитивно ясной идеей сходства больших участков достаточно случайного графа по своим статистическим свойствам с непрерывной топологией. Однако строгих процедур такого перехода обычно не предлагается. В данной работе предлагается строгая процедура такого преобразования, эффективная в важных для приложений случаях евклидова и псевдоевклидова пространства, а также в достаточно широком классе топологий. Обычно переход от описания процессов на графах к их описанию на соответствующих непрерывных пространствах называют описанием процесса в макроскопическом пределе. Поэтому такое преобразование графа в топологию будем далее называть, следуя традиции, макропереходом (от графа к топологии). От графа будем дополнительно требовать равномерную ограниченность ранга каждой вершины.

Все интересующие нас топологии описываются метрикой, которая будет существенно использоваться в построениях. Фактически будет предложено описание этих топологий случайными графами и процедурой макроперехода.

#### 2. Структура решения задачи

Содержательно, идея макроперехода сводится к следующему. На пространстве задана метрика, некоторая индукция и бесконечный граф с конечным ветвлением. Предполагается наличие операции параллельного переноса рёбер графа, которая переносит конец ребра в заданную точку, а начало переносит так, что сохраняется длина ребра в смысле метрики. Строится такая процедура переноса рёбер в заданную точку, при которой начала рёбер образуют в пределе множество точек, плотное в заданном индукторе. Тогда по графу можно восстановить всю индукцию в форме замыкания полученных множеств. Прикладная интерпретация процедуры макроперехода зависит от интерпретации индукции и способа выбора перемещаемых рёбер для получения заданного элемента индукции. Это будет показано для евклидовой и конической индукции.

От генератора графа требуется следующее. Вершины графа генерируются в заданном метрическом пространстве. Требуется существование в этом пространстве транзитивной группы изометрий. Ребра графа ориентированы. Множество вершин графа в общем случае бесконечно. Число рёбер каждого типа вход/выход ограничено сверху заданным значением. У каждой вершины имеется окрестность, в которой нет ни одной другой вершины. Длину ребра определим как расстояние между связанными им вершинами без учета направления.

Множество вершин графа обозначим  $G$ , а множество ребер —  $A$ . Пространство обозначим  $X$ , и метрику в нем —  $d(x, y)$ ,  $x, y \in X$ . Транзитивную группу изометрий обозначим  $H$ .

Кроме того, будем считать, что на пространстве задана индукция  $[X, I]$ , которая согласована с метрикой в следующем смысле. Элементы индукции будем обозначать  $[x, V] \in I$ ,  $x \in X$  — центр элемента индукции,  $V \subset X$  — индуктор центра. Далее обозначим  $\varphi M$  — полный индуктор для произвольного множества  $M$ :

$$\varphi M = \bigcup V \mid \exists x \in M [x, V] \in I;$$

Аксиомы индукторного пространства соответствуют работе [3.1].

Согласованность индукции с метрикой означает, что для произвольного подмножества пространства любая его предельная точка относительно индукции является и предельной точкой относительно метрики. В обратную сторону соответствия не требуется.

Если  $V \subset X$  и  $y \in \text{Lim}\{V\}_I$ , то  $y \in \text{Lim}\{V\}_d$ .

$$V \subset X \ \& \ y \in \text{Lim}\{V\}_I \Rightarrow y \in \text{Lim}\{V\}_d \quad (2.1)$$

**Требование 2.1.** Группа  $H$  содержит однозначно определённую транзитивную подгруппу  $H_p$ , которая для любой пары точек  $g, r \in X$  содержит ровно один оператор  $h_{g,r}$ , для которого  $h_{g,r}g = r$ , и  $h_{rr} = 1$  (единичный элемент группы). Эти операторы назовём параллельными переносами из точки  $g$  в точку  $r$ , используя аналогию с соответствующим действием в аффинных пространствах. Возможность выделения такой подгруппы в теории групп Ли называется разложением группы с просто-транзитивным действием [3.7], и действие подгруппы  $H_p$  называется просто-транзитивным.

**Определение 2.1.** Пусть заданы вершина  $r \in G$  и множество  $B \subset X$ ,  $r \in B$ . *Входной концентрацией* в вершине  $r$  по базе  $B$  назовём множество точек, которые получены из исходящих вершин всех тех рёбер графа, из которых есть ребро, входящее в базу, после параллельного переноса этих рёбер их входными вершинами в вершину  $r$ . Обозначим его

$$C_{in}(r, B) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (q, g) \in A\}.$$

Аналогично определим *выходную концентрацию* в вершине по базе:

$$C_{out}(r, B) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (g, q) \in A\}.$$

Это совокупность точек, которые получены из входных вершин всех тех рёбер графа, у которых исходная вершина входит в базу  $B$ , после параллельного переноса этих рёбер их исходными вершинами в вершину  $r$ .

Для произвольного множества  $M \subset X$  обозначим  $(M)_\varepsilon$  его  $\varepsilon$ -окрестность:

$$\{g \mid d(g, M) \leq \varepsilon\} = (M)_\varepsilon$$

**Определение 2.2.** Скажем, что у точки пространства  $r \in X$  и элемента индукции  $[r, V] \in I$  имеется  $\varepsilon$ -эффективное множество  $E$ , если входная концентрация в точке  $r$  по базе  $(E)_\varepsilon$  даёт множество точек, всюду плотное на индукторе  $V$  и содержащееся в этом индукторе.

$$C_{in}(r, (E)_\varepsilon) = \{h_{gr}q \mid d(g, E) \leq \varepsilon, (q, g) \in A\} \sim V \quad (2.2)$$

где отношение  $M \sim M'$  означает, что множество  $M$  является всюду плотным подмножеством множества  $M'$  в заданной метрике.

**Требование 2.2.** Каждая точка пространства  $r \in X$  имеет  $\varepsilon$ -эффективное множество  $E$  для любого  $\varepsilon > 0$  и любого своего индуктора  $V$ . Это множество может быть определено не однозначно. Совокупность всех таких множеств обозначим  $E(r, V, \varepsilon)$ .

**Требование 2.3.** Любой автоморфизм индукции переводит  $\varepsilon$ -эффективное множество каждой точки и её индуктора в некоторое  $\varepsilon$ -эффективное множество образа этой точки и образа этого индуктора.

$$\begin{aligned} p \in \text{aut}\{I\} \& E \in E(g, V, \varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow pE \in E(pg, pV, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Замечание 2.1.** Если граф удовлетворяет требованию 2.2, то элемент индукции  $[x, V] \in I$  может быть восстановлен по графу с помощью операции концентрации

$$V = C_{in}(x, (E(x, V, \varepsilon))_\varepsilon)^* \quad (2.5)$$

где звёздочка в верхнем индексе означает замыкание множества по метрике, а параметр ипсилон принимает произвольное положительное значение.

Это позволяет рассматривать преобразование (2.5) как макропереход от графа к индукции непрерывного пространства. В прикладных задачах ипсилон-эффективные множества желательно получить в форме, имеющей содержательную интерпретацию. Это накладывает дополнительные ограничения на генератор графа, но эти ограничения носят не математический характер. В последующих разделах даются примеры содержательно интерпретируемых макропереходов в области физики.

**Замечание 2.2.** Если выполнены требования 2.2 и 2.3, то, независимо от группы автоморфизмов самого графа, группа автоморфизмов, сохраняющих макропереход, совпадает с группой автоморфизмов исходной индукции.

**Замечание 2.3.** Поскольку восстановленный индуктор возникает как замыкание всюду плотного множества, то он всегда замкнут в исходной топологии. Если индукция содержит открытые или частично замкнутые в этой топологии индукторы, то они будут восстанавливаться с точностью до замыкания. Это не влияет на те топологические свойства индукции, которые связаны с внутренними точками индукторов. Но, вообще говоря, точно восстановить макропереходом можно только такую индукцию, у которой все индукторы замкнуты в базовой топологии.

### 3. Требования к генератору графа в конической индукции

В качестве пространства вложения графа рассмотрим евклидово пространство  $X = \mathbb{R}^{n+1}$  с конической индукцией  $I = Rc[n+1]$ . Для построения графа выберем некоторую ортонормальную систему координат с осью  $\langle x_0 \rangle$ , параллельной осевой линии конусов-индукторов, и с осями  $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$  в гиперплоскости сферического сечения конусов.

Множество вершин графа образует пуассоновское «напыление» (sprinklings) [3.8] в  $X = \mathbb{R}^{n+1}$ .

Это реализация случайной величины, принимающей значения в множестве дискретных размещений счётного числа точек на евклидовом пространстве  $X$  с обычным определением объёма. Вероятностное распределение этой величины определяется формулой Пуассона. Если  $A \subset X$  —

подмножество конечного объёма  $V$ , то вероятность наличия в нём ровно  $N$  точек из напыления равна

$$p(N|V) = \rho V^N e^{-\rho V} / N! \quad (3.1)$$

Этот закон инвариантен относительно любого преобразования пространства, которое сохраняет евклидов объём измеримых по Лебегу подмножеств. Однако, реализация этой случайной величины (напыление) не инвариантно относительно большинства таких преобразований. Важными подгруппами инвариантности (3.1) являются группы аффинных сдвигов и поворотов, группа псевдоповоротов Лоренца (при любом задании выделенной оси), унитарная линейная группа. Перечисленные подгруппы имеют пересечения.

С вероятностью 1 в таком напылении у каждой его точки в любой евклидовой компактной окрестности содержится только конечное число точек напыления. В указанной работе [3.8] показано, что любой лоренц-инвариантный оператор (системно независимый), который сопоставляет детерминировано каждому напылению некоторый граф с вершинами конечного ранга, является неизмеримой функцией на сигма-алгебре событий, где задана мера (3.1). Однако, если отказаться от системной независимости оператора, то построение графа на точках напыления возможно. При этом, в разных системах отсчёта оператор будет иметь различные определения. Это означает, что такой оператор выделяет одну систему отсчёта, в которой он имеет каноническое определение. Дальнейшие построения будут вестись в предположении, что описание построения графа ведётся в некоторой заданной системе отсчёта, в которой будет опосредована и порождающая система элементов конической индукции, определяющей псевдометрику.

Заметим, что выбор этой системы произволен, и порождённая индукция не зависит от выбора этой системы. Однако от системы отсчёта зависит описание оператора построения графа. Такие конструкции часто встречаются в физике. Например, описание движения планет выглядит проще в гелиоцентрической системе, хотя эквивалентные движения можно более сложно описать с привязкой к любому небесному телу. Это не нарушает принципа относительности и равноправия систем отсчёта. Такие операторы назовём системно зависимыми. Формализация этих рассуждений требует введения обозначений. Обозначим через  $F$  систему отсчёта в пространстве Минковского,  $L$  — произвольное преобразование Лоренца, преобразующее систему отсчёта,  $\eta$  — реализацию пуассоновского напыления в этом пространстве,  $\gamma$  — оператор построения графа, который определён на паре (напыление и система отсчёта),  $\Gamma = (G; A)$  — граф с множеством вершин  $G$  и множеством рёбер  $A$ ,  $A \subset G \times G$ . Тогда

$$\gamma: (\eta, F) \mapsto \Gamma, \quad (3.2)$$

$$\Gamma = (\eta; A)$$

Формула (3.2) описывает тип оператора, а его левое действие будем обозначать кружком:  $\gamma \circ (\eta, F) = (\eta; A)$ .

Свойство системной независимости генератора выражается любым из двух эквивалентных равенств:

$$\gamma \circ (L\eta, F) = L(\gamma \circ (\eta, F)) \quad (3.3)$$

$$\gamma \circ (\eta, LF) = L^{-1}(\gamma \circ (\eta, F)) \quad (3.3a)$$

Свойство системной зависимости выражается другим равенством:

$$\gamma \circ (L\eta, LF) = L(\gamma \circ (\eta, F)) \quad (3.4)$$

По сказанному выше, генератор графа надо строить с требованием (3.4).

#### 4. Построение генератора графа на напылении в пространстве Минковского

**Соглашение 4.1** Для упрощения описания генерации графа на точках напыления введём термин «автономная реализация с заданным распределением». Этот термин выделяет класс случайных величин, которые независимы в совокупности. Автономная реализация означает получение значения одной из таких величин. Разные автономные реализации соответствуют разным случайным величинам из этого класса даже при совпадении распределений вероятностей. Таким образом, указанное в реализации распределение случайной величины является как безусловным, так и условным распределением вероятности при условии ранее полученных значений других автономных реализаций.

Введём два стандартных распределения случайных величин с натуральными значениями.

$$p(i), i = 1, \dots; p(i) > 0; \sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} ip(i) < \infty; \quad (4.1)$$

$$q(k), k = 1, \dots, K; q(k) \geq 0; \sum_{k=1}^K q(k) = 1; \quad (4.2)$$

Пусть дана автономная реализация  $\eta$  напыления с распределением (3.1). Для каждой точки  $x \in X$  выделим три подмножества точек напыления.

$$W(x, \eta) = \{y | y \in \eta, 0 < \|y - x\|_M^2\} \quad (4.3)$$

$$W_-(x, \eta) = \{y | y \in \eta, 0 < \|y - x\|_M^2, (y)_0 < (x)_0\} \quad (4.4)$$

$$W_+(x, \eta) = \{y | y \in \eta, 0 < \|y - x\|_M^2, (y)_0 > (x)_0\} \quad (4.5)$$

$$W(x, \eta) = W_-(x, \eta) \cup W_+(x, \eta);$$

$$W_-(x, \eta) \cap W_+(x, \eta) = \emptyset;$$

Здесь норма  $\|\cdot\|_M$  псевдоевклидова, и сравниваются координаты точек по нулевой оси в обозначениях координат раздела 3. С вероятностью 1 эти множества бесконечные счетные для всех точек пространства  $x \in X$ . На каждом из этих множеств зададим нумерацию точек  $n(y|x_+)$  и  $n(y|x_-)$  в порядке возрастания евклидова расстояния от точки  $x$ .

$$\begin{aligned}
y &= \arg \min_y |y - x| \Leftrightarrow n(y | x\alpha) = 1; \\
|y - x| > |y' - x| &\Leftrightarrow n(y | x\alpha) > n(y' | x\alpha); \\
\alpha &= +, -; y, y' \in W_\alpha(x, \eta);
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для каждой точки  $z \in \eta$  проводится построение входящих и исходящих рёбер. Делается автономная реализация величины  $K_-(z)$  распределения  $q(\cdot)$ . По определению  $K_-(z) \leq K$ . Делается ровно  $K_-(z)$  автономных реализаций распределения  $p(\cdot)$ :  $n(1), \dots, n(K_-(z))$ . Из множества  $W_-(z, \eta)$  выбираются точки с этими номерами  $n(y(i) | z-) = n(i)$ . Строятся ребра, входящие в точку  $z$ :  $(y(1), z), \dots, (y(K_-(z)), z)$ . На этом этапе множества и номера с индексом  $+$  не используются. Построение графа завершено. В каждой вершине не более чем  $K$  входящих ребер. Число исходящих рёбер непосредственно оценить нельзя, поскольку оно равно числу вершин, в которые из данной вершины есть входящая связь.

**Замечание 4.1.** В силу условия (4.1) у распределения  $p(\cdot)$  имеется конечное математическое ожидание, а распределение (3.1) обеспечивает с вероятностью 1 конечное число точек в любом шаре с центром в данной точке. Поэтому с вероятностью 1 число исходящих рёбер из любой точки напыления конечно, но нет равномерного ограничения на это число по всему напылению. Для обеспечения ограничения на число исходящих рёбер, введём следующую модификацию алгоритма. Если очередному номеру  $n(i)$  соответствует вершина, у которой уже есть  $K$  исходящих рёбер, то вместо этого номера берётся наименьший из следующих номер  $n'(i) > n(i)$ , для которого точка имеет меньшее число исходящих рёбер. В этом случае становится существенен порядок перебора точек  $z$ . При такой модификации у каждой точки не более чем  $K$  исходящих рёбер. Построение закончено.

**Замечание 4.2.** Двойственный алгоритм. Используя множество  $W_+(z, \eta)$  можно аналогично построить граф на точках напыления, основываясь на исходящих связях.

Такие графы будем называть далее графами *конической генерации*.

## 5. Варианты реализации напылений

В разделе 3 описано напыление, полученное как реализация распределения Пуассона. Оно обладает свойством системной независимости в следующем смысле. Пусть задана вероятностная мера на множестве напылений в пространстве  $X$ , которая определена следующим образом. Для любого ограниченного открытого множества  $U$  в евклидовой топологии на  $X$  задана сигма-алгебра  $S$  на множестве расположений конечного числа точек  $\eta$  на

$U$ , порождённая множествами

$$\begin{aligned}
U(x_1, r_1; \dots; x_N, r_N), \quad N = 0, 1, \dots, \\
x_1, \dots, x_N \in U, \quad r_1, \dots, r_N \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

имеющими следующее определение. Каждое такое множество состоит из расположения ровно  $N$  точек, причем точка с номером  $i$  расположена в пересечении множества  $U$  и шара радиуса  $r_i$  с центром в точке  $x_i$ .

Мера определена как функция  $P(B|U, F)$ ,  $B \in S(U)$ ,  $F$  — система отсчёта в пространстве Минковского на  $X$ , согласованная с конической индукцией. Нормировка отдельная для каждой области  $U$ . Если  $r = \text{diam}(U)$ ,  $x \in U$  то

$$\sum_{N=0}^{\infty} P(U(x, r; \dots; x, r) | U, F) = 1 \tag{5.2}$$

Тогда условие системной зависимости (от системы отсчёта)

$$P(LB | LU, LF) = P(B | U, F) \tag{5.3}$$

Более сильное условие системной независимости дополнительно требует

$$P(LB | LU, F) = P(B | U, F) \tag{5.4}$$

Системная независимость означает, что вероятность любого измеримого множества напылений в любой ограниченной области имеет одинаковые значения при вычислениях во всех системах отсчёта. При системной зависимости требуется только совпадение этих вероятностей на образах одной области в разных системах отсчёта при задании системы отсчёта.

Системной независимостью обладает мера Пуассона (3.1). Она задана на сигма-алгебре, в которой учитывается только число точек  $N$  и объём области по Евклиду.

Условие системной зависимости позволяет строить значительно более широкий класс напылений, чем допускает системная независимость. Среди этих напылений имеются такие, реализация которых с вероятностью 1 допускает применение схемы макроперехода. Для определения системно зависимого напыления достаточно определить его в некоторой фиксированной системе отсчёта и постулировать формулу (5.3).

**Пример 5.1.** Зафиксируем систему отсчёта  $F_0$ . В этой системе построим координатную сетку с шагом  $\mathcal{E}$  по каждой из осей  $\langle x_0 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$ . Клетки этой сетки будем координировать вершиной с минимальными координатами по всем осям. В каждой клетке поместим ровно одну точку напыления, которая получается как автономная реализация равномерного распределения вероятностей по этой клетке. Мера  $P(B|U, F)$  вычисляется путем наложения клеточного разбиения на область  $U$  и вычисления соответствующих вероятностей попадания точек в область с учётом независимости реализаций в разных клетках по соглашению 4.1. В этом примере

расстояния между ближайшими точками не превосходят двух диаметров клетки  $2\varepsilon\sqrt{(n+1)}$ . И у каждой точки с вероятностью 1 имеется евклидова окрестность, в которой нет других точек.

Это напыление определено как системно зависимое и не является системно независимым, поскольку при смене системы отсчёта с заменой координатных осей преобразованием Лоренца сеть перестанет быть координатной, а при действии преобразования Лоренца на сеть в исходной системе координат клетки перестают быть кубическими и координатными. Только действие преобразования и на сеть, и на координатные оси сохраняет инвариантность определения меры.

**Пример 5.2.** Предыдущий пример можно многовариантно модифицировать, задавая разные покрытия пространства областями равномерно ограниченного сверху диаметра и ограниченного снизу объёма. При этом не требуется выдерживать в этом покрытии какую-либо симметрию. Области покрытия могут иметь перекрытия конечной кратности.

## 6. Построение макроскопического перехода

За основу построения можно взять любое напыление, описанное в разделе 5, и построенный по нему граф, генератор которого описан в разделе 4. Для определения макроперехода надо указать  $\mathcal{E}$ -эффективное множество  $E$  для любой точки пространства. В конической индукции полные индукторы точек образуют структуру, изоморфную системе световых конусов в прошлом в пространстве Минковского той же размерности [3.9][3.10-12].

Следуя терминологии теории относительности, назовём времяподобной линией в пространстве  $X$  гладкую линию, проходящую внутри полного индуктора любой своей точки. Времяподобную линию, точки которой имеют неограниченную снизу нулевую координату, назовём бесконечной в прошлое.

**Теорема 6.1.** Произвольная времяподобная бесконечная в прошлое линия является  $\mathcal{E}$ -эффективным множеством  $E$  для полного индуктора любой своей точки при положительном ипсилон.

Доказательство.

**Лемма 6.1.** При любом положительном значении ипсилон с вероятностью 1 в  $\mathcal{E}$ -трубку вокруг времяподобной линии попадает бесконечно много точек напыления. Это следует из того, что в любом положительном объеме есть ограниченная снизу вероятность появления в нём точки напыления. Поскольку  $\mathcal{E}$ -трубку можно разбить на бесконечное число секций, имеющих объём не менее заданного значения, то с вероятностью 1 в бесконечном числе секций будет содержаться точка напыления.  $\square$

**Лемма 6.2.** Параллельный перенос всех рёбер, входящих в точки напыления, содержащихся в  $\mathcal{E}$ -трубке времяподобной линии  $T$ , в любую точку  $x \in T$  этой линии даёт всюду плотное множество  $Q$ ,

состоящее из концевых исходящих точек этих рёбер, в конусе  $\varphi\{x\}$  полного индуктора этой точки  $x$ .

Доказательство леммы. Для каждой точки  $y$  напыления из  $\mathcal{E}$ -трубки, для любой точки  $z \in \varphi(y)$  и для любого  $\delta > 0$ , имеется положительная вероятность наличия ребра  $(z', y)$ , где  $z'$  принадлежит  $\delta$ -окрестности точки  $z$ ,  $z' \in (\{z\})_\delta$  в обозначениях раздела 2. И эта вероятность зависит только от параметров  $\delta$  и  $D = (z - y)$ . Поэтому с вероятностью 1 найдётся точка напыления в  $\mathcal{E}$ -трубке, где такое ребро есть. В силу произвольности параметров  $\delta$  и  $D = (z - y)$  после параллельного переноса всех таких рёбер в точку  $x$  будет точка исходящего конца ребра в любой  $\delta$ -окрестности любой точки  $x - D$  полного индуктора  $\varphi\{x\}$ .  $\square$

Доказательство теоремы следует из леммы 6.2 и определения  $\mathcal{E}$ -эффективного множества. Теорема доказана.

**Следствие.** Макропереход по графу конической генерации порождает систему полных индукторов конической индукции. Как показано в [3.1], при размерности пространства  $n+1 \geq 3$  группа автоморфизмов такой индукции совпадает с аффинной подгруппой группы Пуанкаре (преобразования Лоренца, дилатации и сдвиги).

**Теорема 6.2.** Если индукция задана в конечномерном евклидовом пространстве, и индуктор точки содержит открытое множество, а напыление нигде не плотное, то любое  $\mathcal{E}$ -эффективное множество этого индуктора некомпактное и его  $\mathcal{E}$ -окрестность имеет бесконечный объём.

Доказательство. В любом множестве конечного объёма содержится только конечное число точек напыления. Поэтому входящие связи этих точек при параллельном переносе в центр индукции дают конечное число точек в индукторе, которое не может быть плотным подмножеством ни в каком открытом множестве. У каждого компактного подмножества в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$ -окрестность имеет конечный объём. Поэтому  $\mathcal{E}$ -эффективное подмножество указанного в условии индуктора должно быть некомпактным.  $\square$

**Следствие.** Невозможно построить  $\mathcal{E}$ -эффективные подмножества для компактных индукторов конической индукции. Каждый такой индуктор содержит конус конечной высоты и попадает под условие теоремы. Но в любой области бесконечного объёма содержатся точки напыления с входящими рёбрами сколь угодно большой длины. Поэтому их параллельный перенос в вершину конуса даст множество концов, выходящих за пределы индуктора. Таким образом, макропереход может определить только индукцию с неограниченными конусами, которая рассматривается в [3.2, 3.4] и [3.8-12].

**Замечание 6.1.** Если сделать двойственный макропереход, используя исходящие рёбра по

замечанию 4.2, то получится двойственная индукция с конусами индукторов, ось которых направлена по оси  $\langle x_0 \rangle$  в сторону  $+\infty$ . При этом не меняются напыление и граф. Используя эти два макроперехода, можно построить множества Александра и получить с помощью операций пересечения и объединения этих множеств любую стандартную коническую индукцию. (См. определение 2 во введении к статье, а также замечание 2.3.)

Доказательство. Обозначим  $\varphi_-(x)$  и  $\varphi_+(x)$  полные индукторы точки  $x$ , восстановленные по входящим и исходящим рёбрам. Тогда любое множество Александра выражается в форме

$$A(x, y) = \varphi_-(x) \cap \varphi_+(x) \quad (6.1)$$

Эту формулу можно считать математическим определением множества Александра, которое выражает причинно-следственный интервал между точками  $x$  и  $y$  в пространстве Минковского, при условии, что первая точка следует за второй в частичной упорядоченности световых конусов. В противном случае это множество пустое.

Множества Александра имеют конечный объём по Евклиду. Они могут быть включены в коническую индукцию как индукторы той своей вершины, у которой больше значение координаты  $x_0$ , поскольку любая биекция, сохраняющая систему полных конусов, сохраняет и множества Александра.

Кроме того, верно и обратное: биекция, относительно которой инвариантен класс всех множеств Александра, сохраняет и полные конусы, поскольку каждый конус может быть получен, как объединение всех Александровских индукторов своей вершины.

Если множества Александра включить указанным способом в коническую индукцию, то они своими объединениями по аксиомам индукторного пространства [3.1, 3.3] порождают любой индуктор, удовлетворяющий определению стандартной конической индукции.  $\square$

**Замечание 6.2.** Обозначим  $A_0(x, y)$  множество внутренних точек соответствующего множества Александра в евклидовой топологии, и назовём его областью Александра. Тогда вся топология Евклида порождается объединениями (возможно трансфинитными) областей Александра. Это следует из того, что область Александра топологически эквивалентна открытому шару. Для такого макроперехода требуется кроме замыкания плотного множества использовать извлечение множества внутренних точек из этого замыкания. В обозначениях формулы (2.5), используя обозначение  $(\cdot)_0$  для оператора извлечения внутренних точек, можно записать

$$(V)_0 = (C_{in}(x, (E(x, V, \varepsilon))_\varepsilon)^*)_0 \quad (6.2)$$

## 7. Макропереходы с фильтрами

Из теоремы 6.2 следует, что для построения компактных индукторов непосредственно макропереходом без дополнительных операций, требуется некоторая модификация построения концентраций по базовым множествам. Рассмотрим одну из таких модификаций.

**Определение 7.1.** Следуя определению 2.1, определим концентрацию с фильтром. Пусть задан некоторый класс  $M$  рёбер графа, в который каждое ребро может либо входить, либо нет. Пусть заданы вершина  $r \in G$  и множество  $B \subset X$ ,  $r \in B$ . *Входной концентрацией* в вершине  $r$  по базе  $B$  с фильтром  $M$  назовём множество вершин графа, которые получены параллельным переносом в вершину  $r$  всех тех вершин графа, из которых есть ребро, входящее в базу, и это ребро принадлежит классу  $M$ . Обозначим его

$$C_{in}(r, B, M) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (q, g) \in A \cap M\} \quad (7.1)$$

Аналогично определим *выходную концентрацию* в вершине по базе с фильтром:

$$C_{out}(r, B, M) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (g, q) \in A \cap M\} \quad (7.2)$$

Это совокупность вершин, полученных параллельным переносом в точку  $r$  тех вершин, в которые идут исходящие рёбра из множества  $B$ , принадлежащие классу  $M$ .

Содержательная ценность такого макроперехода будет зависеть от интерпретации класса фильтрации рёбер. Назовём *метрическим фильтром* для графов, вложенных в евклидово пространство, множество

$$M(\delta) = \{(x, y) \mid (x, y) \in A, |y - x| < \delta\}, \quad (7.3)$$

которое состоит из рёбер, евклидова длина которых меньше заданного значения. Определение этого фильтра естественно обобщается на графы, вложенные в произвольное метрическое пространство.

**Теорема 7.1.** Макропереход с графом конической генерации (раздел 4) и системой концентраций по метрическим фильтрам вида (7.3) с разными значениями параметра  $\delta$  определяет набор индукторов, порождающий по аксиоме транзитивного объединения все индукторы любой стандартной конической индукции (с точностью до частичного замыкания, см. замечание 2.3).

Доказательство. Обозначим  $B(x, r)$  замкнутый шар радиуса  $r$  с центром  $x$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , где задана коническая индукция. Тогда макропереход в графе конической генерации с фильтром  $M(\delta)$  даст множество

$$\varphi_\delta(x) = \varphi(\{x\}) \cap B(x, \delta) \quad (7.4)$$

Если выбрать последовательность  $\delta_i \downarrow 0 \mid i \rightarrow \infty$ , то соответствующая система множеств  $\Phi = \{\varphi_\delta(x) \mid x \in X, \delta \in \{\delta_i\}\}$  образует базу, порождающую замыкание любого стандартного конического индуктора.  $\square$

**Определение 7.2.** Назовём графом шаровой генерации по напылению  $\eta$  нижеследующее определение множества рёбер. Используем соглашение 4.1 и распределения вероятностей (4.1) и (4.2). Пусть дана автономная реализация  $\eta$  напыления с распределением (3.1). Зададим для каждой точки  $x \in X$  нумерацию  $n(y|x)$  всех точек  $y \in \eta$  из напыления в порядке возрастания евклидова расстояния от точки  $x$ .

$$y = \arg \min_y |y - x| \Leftrightarrow n(y|x) = 1;$$

$$|y - x| > |y' - x| \Leftrightarrow n(y|x) > n(y'|x); \quad (7.5)$$

Для каждой точки  $z \in \eta$  проводится построение входящих и исходящих рёбер. Делается автономная реализация величины  $K_-(z)$  распределения  $q(\cdot)$ . По определению  $K_-(z) \leq K$ . Делается ровно  $K_-(z)$  автономных реализаций распределения  $p(\cdot)$ :  $n(1), \dots, n(K_-(z))$ . Из множества  $\eta$  выбираются точки с этими номерами  $n(y(i)|z) = n(i)$ . Строятся ребра, входящие в точку  $z$ :  $(y(1), z), \dots, (y(K_-(z)), z)$ . На этом этапе построения можно применить метод ограничения исходящих рёбер, описанный в замечании 4.1. Построение завершено.

**Теорема 7.2.** Макропереход с графом шаровой генерации и системой концентраций по метрическим фильтрам вида (7.3) с разными значениями параметра дельта определяет набор индукторов, порождающий всю топологию Евклида по аксиоме объединения.

Доказательство. В качестве  $\mathcal{E}$ -эффективных множеств, рассмотрим произвольное семейство прямых, проходящих через все точки  $x \in X$ . Макропереход в графе шаровой генерации с фильтром  $M(\delta)$  даст множество  $B(x, \delta)$ . Используя последовательность  $\{\delta_i\}$  из доказательства теоремы 7.1, получим систему подмножеств, соответствующих разным фильтрам,  $B = \{B(x, \delta) | x \in X, \delta \in \{\delta_i\}\}$ , которая является базой, порождающей все открытые множества топологии Евклида и их замыкания, путём операции объединения, возможно в трансфинитном числе.  $\square$

**Замечание 7.1.** Если сделать макропереход в графе сферической генерации с концентрацией без метрического фильтра, то у всех точек будет получена одинаковая окрестность, совпадающая со всем пространством.

## 8. Равномерное вложение графа в евклидово пространство

В предыдущих построениях существенно использовалось то, что генерация графа происходит в евклидовом пространстве заданной размерности. Рассмотрим каким внутренним характеристикам графа это соответствует.

**Определение 8.1.** Бесконечный граф имеет равномерную метрическую размерность  $n$ ,  $n < \infty$ , если его вершины можно инъективно вложить в евклидово пространство данной размерности со следующими ограничениями.

1а. Расстояние между любыми двумя вершинами не меньше некоторого значения  $\varepsilon > 0$ .

2а. Длина любого ребра не превышает некоторого значения  $a$ ,  $0 < a < \infty$ .

3а. Такого вложения не существует для меньших размерностей.

Обозначение  $n = \text{metr dim}(G, A)$ .  $\square$

**Замечание 8.1.** Графы с конечной равномерной метрической размерностью имеют равномерное ограничение на ранг вершин. Это следует из того, что после вложения в евклидово пространство в каждом шаре содержится только конечное число вершин, а длины рёбер равномерно ограничены. Поэтому число ребер, смежных одной вершине, не выше числа образов вершин в шаре с радиусом равным ограничению на длину рёбер. Графы с неограниченным рангом вершин не имеют равномерной метрической размерности.

**Пример 8.1.** Рассмотрим напыление примера 5.1 (в каждой клетке клеточного разбиения пространства  $\mathbb{R}^n$  содержится ровно одна точка напыления). Построим на точках напыления граф, сопоставив ребро любой паре точек в соседних клетках, имеющих общую грань некоторой субразмерности. Этот граф имеет строгую размерность  $n$ . Для построения нужного вложения достаточно каждую точку напыления переместить в центр соответствующей клетки. Если сторона клетки равна 1, то вложение имеет параметры  $\varepsilon = 1$  и  $a = \sqrt{n}$ .

**Пример 8.2.** Рассмотрим пуассоновское напыление раздела 3. Зададим равномерное ограничение  $K$  на ранг вершины графа. Построим на точках напыления как на вершинах граф, сопоставив ребро каждой паре точек напыления, между которыми расстояние меньше 1. Пронумеруем точки реализации напыления произвольным образом. Начиная с вершины с номером 1, последовательно проведём прореживание напыления. Если у очередной вершины ранг окажется выше заданного равномерного ограничения, то отбросим смежные ей вершины с ближайшими большими, чем у неё, номерами и соответствующие этим вершинам рёбра во всём графе, в необходимом числе. Полученный граф имеет равномерную метрическую размерность  $n$ . После прореживания в каждом единичном шаре остаётся точек не более, чем  $K$ . Распределим вершины графа по точкам равномерной координатной сети с достаточно малым шагом  $\varepsilon < K^{-1}$ , отобразив каждую вершину в ближайшую к ней точку сети. Полученное вложение соответствует параметрам  $\varepsilon$  и  $a = 1 + 2\varepsilon\sqrt{n}$ .

**Замечание 8.2.** В обоих примерах исходное расположение точек в пространстве удовлетворяет равномерному верхнему ограничению на длину рёбер,

но допускает сколь угодно близкое расположение вершин графа (как смежных, так и не смежных).

**Замечание 8.3.** Если отказаться от требования нижнего ограничения на расстояния между точками, а требовать только отсутствия точек накопления образов вершин, то любой граф с конечным рангом вершин можно вложить в одномерное пространство при наличии равномерного верхнего ограничения на длину рёбер. Для доказательства рассмотрим связную компоненту графа (без учёта ориентации рёбер). Выберем в ней одну вершину, которую назовём стартовой. Отобразим стартовую точку в точку 0 числовой прямой, 1-окрестность стартовой вершины в интервал  $(0;1)$ , 2-окрестность — в интервал  $(1;2)$ , и т. д. Тогда все рёбра имеют длину не более 2. Но (в общем случае) число образов вершин  $i$ -окрестности стартовой точки на интервалах  $(i-1; i)$  растёт неограниченно с ростом радиуса окрестности, и расстояние между этими точками становится сколь угодно малым.

**Замечание 8.4.** Если отказаться от требования верхнего ограничения на длину рёбер, то все графы со счётным числом вершин имеют вложение в одномерное пространство при наличии нижнего ограничения на расстояния между вершинами. Для доказательства можно произвольно расположить вершины по целым точкам числовой прямой.

**Определение 8.2.** Рассмотрим граф  $(G, A)$  со счётным числом вершин и конечным рангом всех вершин. Обозначим  $U(g, r)$   $r$ -окрестность вершины  $g \in G$  по рёбрам графа без учёта ориентации,  $r \in \mathbb{N}$ , и  $u(g, r) = \#U(g, r)$  — число вершин в этой окрестности. Назовём топологической размерностью графа величину

$$\text{top dim}(G, A) = \sup_{g \in G} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(u(g, r))}{\log(r)} \right\} \quad (8.1)$$

Это частный случай размерности Хаусдорфа для случая степенного роста меры окрестности от радиуса. Если  $n = \text{top dim}(G, A)$ , то

$$u(g, r) = b(r)r^n; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(b(r))}{\log(r)} = 0; \quad (8.2)$$

**Утверждение 8.1.** Для любого графа, имеющего как равномерную метрическую, так и топологическую размерность, верно неравенство

$$\text{top dim}(G, A) \leq \text{metr dim}(G, A). \quad (8.3)$$

Доказательство. Если для графа определена равномерная метрическая размерность, то для любой вершины  $U(g, r) \subset B(x(g), ar)$ , где  $x(g)$  — образ вершины  $g \in G$  при вложении в  $\mathbb{R}^n$ , а  $B(x, R)$  — шар с центром в  $x$  и радиусом  $R$  в этом евклидовом пространстве. Число образов вершин в этом шаре не превосходит значения  $(2ra/\varepsilon)^n$ . Поэтому  $u(g, r) \leq (2a/\varepsilon)^n r^n$ , и по формуле (8.2)  $\text{top dim}(G, A) \leq n$ .  $\square$

**Утверждение 8.2.** Имеются графы, для которых неравенство (8.3) строгое.

Приведём пример такого графа. Схема начального участка показана на рисунке 5.

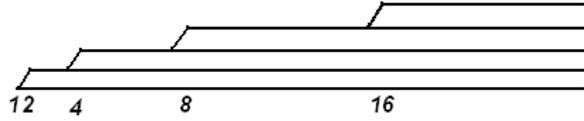


Рис.5. Схема графа, определённого формулами (8.4)(8.5). Отмечены точки ветвления. Рёбра идут вдоль показанных линий. Граф имеет топологическую размерность 1 и метрическую размерность 2. Горизонтальные линии выражают последовательности вершин с рёбрами между соседними вершинами. Наклонные отрезки выражают одиночные рёбра.

Вершины графа определим как подмножество двухмерной целочисленной решётки  $G \subset \mathbb{Z}^2$ . Оно состоит из дискретных полупрямых

$$L_0 = \{(0, i) \mid i = 1, \dots\};$$

$$L_1 = \{(1, i) \mid i = 2, 3, \dots\}; \dots$$

$$L_m = \{(m, i) \mid i = 2^m, 2^m + 1, \dots\}, \quad m = 0, 1, \dots;$$

$$G = L_0 \cup L_1 \cup \dots; \quad (8.4)$$

Множество рёбер:

$$A = \left\{ ((m, i), (m, i+1)) \mid m \in 0, 1, \dots; \right. \\ \left. i \geq 2^m; i \in \mathbb{N} \right\} \cup \\ \cup \left\{ ((m, 2^m - 1), (m+1, 2^m)) \mid m = 1, \dots \right\}; \quad (8.5)$$

Наиболее быстро в этом графе растут окрестности точки  $x = (0, 1)$ . Рёбра из второго подмножества правой части (8.5) задают ветвление графа на линейные компоненты, определённые первым подмножеством той же формулы. Для  $r$ -окрестности указанной точки длины всех линейных участков не больше  $r$ , а число линейных компонент равно  $\lfloor \log(r) \rfloor$ . Поэтому можно записать оценку  $u(x, r) \leq r \lfloor \log(r) \rfloor$ . Тогда

$$\text{top dir}(G, A) = \text{Lim}_{r \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\log \log(r)}{\log(r)} \right) = 1$$

Но при равномерном метрическом вложении графа с неограниченным ветвлением в евклидову прямую возникают рёбра сколь угодно большой длины. При построении графа было реализовано равномерное метрическое вложение в плоскость. Поэтому  $\text{metr dim}(G, A) = 2$ .  $\square$

Не меняет ситуацию и более сильное определение топологической размерности, в котором зависимость мощности окрестности вершины графа от её радиуса строго степенная.

**Определение 8.3.** Граф имеет сильную топологическую размерность  $n$ , если в формуле (8.2)  $b(r) \leq b < \infty$ .

**Утверждение 8.3.** Имеются графы, для которых неравенство (8.3) строгое при сильной топологической размерности.

Приведём пример такого графа. Схема начального участка показана на рисунке 6.

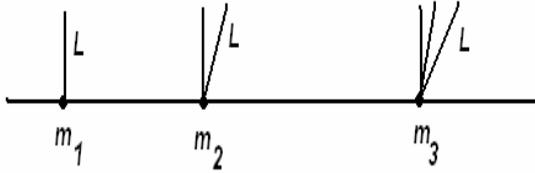


Рис. 6. Схема начального участка графа, имеющего сильную топологическую размерность 1 и метрическую размерность 2. Горизонтальная линия изображает последовательность вершин со связями соседних вершин. Линии  $L$  изображают одиночные рёбра, отмечены номера точек ветвления графа.

Зададим число  $b > 1$  и последовательность натуральных чисел

$$m_i > \frac{i(i+1)}{2(b-1)} - 1; \quad i = 1, \dots; \quad (8.6)$$

Множество вершин

$$G = M \cup L;$$

$$M = \{v_1; v_2; \dots\};$$

$$L = \{w_1^1; w_1^2; w_2^2; \dots; w_1^i; \dots; w_i^i; \dots\};$$

Множество рёбер (неориентированных)

$$A = \{(v_j, v_{j+1}) \mid j = 1, \dots\} \cup$$

$$\{(v_{m_j}, w_k^j) \mid j = 1, \dots; k = 1, \dots, j\}.$$

Второе слагаемое правой части обозначим как множество рёбер  $L$ . В этом графе

$$u(1, m_i + 1) = m_i + 1 + \sum_{j=1}^i j = m_i + 1 + \frac{i(i+1)}{2}.$$

С учётом неравенства (8.6)

$$u(1, m_i + 1) < b(m_i + 1).$$

Для других значений радиуса тем более верно  $u(1, r) < br$ . Значит, сильная топологическая размерность этого графа равна 1. Но если осуществлять равномерное вложение этого графа в  $\mathbb{R}^1$ , то 1-окрестности точек  $v_{m_i}$  требуют использования не менее чем  $i+2$  последовательно расположенных точек. Поэтому длина рёбер в этой окрестности при любом вложении будет не меньше, чем  $\varepsilon(i+2)/2$ . С ростом параметра  $i$  эта величина растёт неограниченно. Следовательно, вложение не является равномерным метрическим. При любом вложении этого графа в конечномерное евклидово пространство неограниченный рост числа рёбер, исходящих из одной вершины приводит либо к неограниченному росту длин рёбер, либо к уменьшению сколь угодно близко к нулю расстояния между свободными концами этих рёбер. Такое

вложение не является метрическим. Таким образом, метрическая размерность этого графа равна  $\infty$ .  $\square$

**Замечание 8.5.** В графе утверждения 8.3 ветвление ранг каждой вершины конечен, но нет равномерного ограничения ранга. В графе утверждения 8.2 ранг всех вершин не выше трёх. Имеется модификация примера утверждения 8.3, в которой ранги вершин равномерно ограничены числом 3. Формальное описание этого графа несколько сложнее, но основано на той же идее, что утверждение 8.3. Приведём схему начального фрагмента этого графа (рисунок 7) и необходимые соотношения параметров.

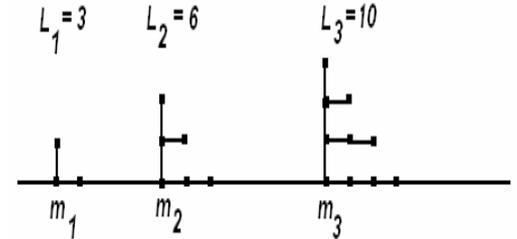


Рис. 7. Граф с сильной топологической размерностью 1 и с метрической размерностью 2 при равномерном ограничении ранга вершин 3. Начальный фрагмент. Линия означает бесконечную вправо цепочку вершин  $v_1, v_2, \dots$ . Отмечены вершины в окрестности точек ветвления.

$$u(v_{m_i}, i) \stackrel{\text{def}}{=} L_i = (i+1)(i+2)/2;$$

$$S(i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^i L_j;$$

$$u(v_1, m_i + i) = m_i + i + S(i);$$

Если

$$m_i > \frac{S(i)}{b-1} - i;$$

то

$$u(v_1, m_i + i) = m_i + i + S(i) < b(m_i + i);$$

Сильная топологическая размерность графа равна 1. Но вложение этого графа в евклидову прямую требует разрядки в  $i+1$  раз для окрестности  $i$ -й точки ветвления. Поэтому любое вложение — не равномерное. Метрическая размерность равна 2 (вложение показано на рисунке 7).

Из сказанного выше следует, что метрическая размерность не определяется только скоростью роста окрестности вершины графа. Требуются дополнительные структурные характеристики. Введём стандартный  $n$ -мерный граф (сеть), с помощью которого можно описать структуру произвольного графа с той же метрической размерностью. Обозначим  $e_1, \dots, e_n$  порождающие векторы целочисленной решётки  $\mathbb{Z}^n$ .

**Определение 8.4.** Назовём  $n$ -сетью граф вида  $\text{Net}(n) = (\mathbb{Z}^n, A[n])$ , где

$$A[n] = \left\{ (z, z + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) \mid z \in \mathbb{Z}^n \right\}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{-1; 0; 1\}$$

В этом графе каждая точка целочисленной  $n$ -мерной решётки связана со всеми точками на поверхности куба со стороной 2 с центром в этой точке. Всего  $3^n - 1$  рёбер у каждой точки. В определении графа вложение в  $\mathbb{R}^n$  не задано, но поскольку  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ , то вложение можно осуществить прямым отождествлением вершин графа и целых точек пространства. Это вложение является равномерным метрическим с  $\varepsilon = 1$  и  $a = \sqrt{n}$ .

**Определение 8.5.** Факторграфом  $(G, A) / \theta = (\theta, A / \theta)$  графа  $(G, A)$  по разбиению  $\theta$  на множестве  $G$  его вершин называется граф, вершины которого суть элементы разбиения, и два элемента разбиения  $v, w \in \theta$  связаны ребром  $(v, w) \in A / \theta$  в факторграфе, если имеются две вершины  $g \in v$  и  $q \in w$ , которые связаны ребром  $(g, q) \in A$  в исходном графе. Факторграф *равномерный*, если число вершин исходного графа во всех элементах разбиения равномерно ограничено сверху конечным числом.

**Теорема 8.1.** Счетный граф имеет метрическую размерность  $n$ , если и только если на нём можно построить равномерный факторграф, который изоморфно вкладывается в  $\text{Net}(n)$ , и это наименьшее такое  $n$ .

**Доказательство. Необходимость.** Если  $(G, A)$  метрически  $n$ -мерный, то рассмотрим его соответствующее вложение в  $\mathbb{R}^n$  (определение 8.1.). Построим произвольное разбиение пространства  $\mathbb{R}^n$  на кубы со стороной  $2a$ , образующее прямоугольную сеть. Рассмотрим разбиение на вершинах графа, объединив в одном элементе вершины, расположенные в одном кубе. В каждом элементе содержится не более чем  $\beta(2a/\varepsilon)^n$  вершин (где  $\beta$  — величина обратная объёму единичного шара). Поскольку длины всех рёбер не превосходят значения  $a$ , то в факторграфе ребра соединяют только соседние кубы. Это означает, что факторграф равномерный и вложен в  $\text{Net}(n)$ .

**Достаточность.** Пусть у  $(G, A)$  имеется равномерный факторграф, который изоморфно вложен в  $\text{Net}(n)$ . Вложим инъективно вершины  $\text{Net}(n)$  в целочисленную решётку на  $\mathbb{R}^n$ . Каждой целочисленной точке сопоставим куб со стороной 1 (клетку), в котором она вершина с наименьшим значением всех координат. Пусть в каждом факторклассе (элементе разбиения) не более чем  $K$  вершин из  $(G, A)$ . Построим в каждом координатном единичном кубе координатную сеть с расстоянием между ближайшими точками  $\varepsilon = 1/K$ . Отобразим вершины из факторкласса, который соответствует

произвольной вершине  $\text{Net}(n)$ , в клетку, которая сопоставлена этой вершине. Причём образы вершин расположим по точкам сети в этой клетке (их заведомо больше, чем  $K$ ). Тогда расстояния между образами вершин не меньше чем  $\varepsilon$ . А длины рёбер не превосходят наибольшего расстояния между вершинами соседних единичных кубов. Поэтому  $a < 2\sqrt{n}$ . Построено равномерное метрическое вложение  $(G, A)$  в  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

## 9. Макропереход перенормировкой вложения графа

В этом разделе будет предложен ещё один метод макроперехода от графа некоторой метрической размерности к непрерывному пространству Евклида той же размерности.

**Определение 9.1.** Метрическая размерность графа  $n$  называется полной, если у него существует локально конечный факторграф, который изоморфен  $\text{Net}(n)$ .

Равномерное метрическое вложение такого графа в  $\mathbb{R}^n$  заполняет все клетки некоторой кубической сети. Назовём его полным вложением.

**Определение 9.2.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  задана последовательность счётных подмножеств  $(W_1, \dots)$ . Точку пространства  $x \in \mathbb{R}^n$  назовём предельной для этой последовательности, если для любого шара с центром в этой точке все члены последовательности, начиная с некоторого, имеют с этим шаром непустое пересечение. Другими словами, для каждого  $r > 0$  существует  $K \in \mathbb{N}$  такое, что при  $k > K$  имеется  $y \in W_k$  для которого  $|y - x| < r$ . Обозначение  $x \in \text{Lim}\{W_1, \dots\}$ . Соответственно, совокупность всех предельных точек последовательности обозначена  $\text{Lim}\{W_1, \dots\}$ .

**Определение 9.3.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  задано счётное подмножество  $W \subset \mathbb{R}^n$ . Назовём дилатацией этого множества относительно точки  $x \in \mathbb{R}^n$  с коэффициентом  $c \in \mathbb{R}$  подмножество

$$D[x, c]W \stackrel{\text{def}}{=} \{x + c(y - x) \mid y \in W\} \quad (9.1)$$

В частности,  $D[x, 1]W = W$ ,  $D[x, 0]W = \{x\}$ .

**Определение 9.4.** Пусть в пространство  $\mathbb{R}^n$  равномерно метрически полно вложен граф  $(G, A)$ . Последовательностью перенормировки этого вложения относительно точки  $x \in \mathbb{R}^n$  назовём последовательность конечных множеств  $W_k(x) = D[x, k^{-1}]U(y(x), k)$ ,  $k = 1, \dots$ , где  $y(x)$  — ближайшая к точке  $x$  вершина графа по вложению,  $U(.,.)$  из определения 8.2.

**Теорема 9.1.** В условиях определения 9.4 последовательность перенормировки порождает

топологию Евклида множествами вида  $D[x, r]Lim\{W_1(x), \dots\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in (0; 1)$ .

Доказательство. В силу полноты вложения графа  $Lim\{W_1(x), \dots\} = C(x, a)$ , где  $a$  — параметр вложения,  $C(x, a)$  — ориентированный по осям координат открытый куб с центром  $x$  и стороной  $2a$ . Поэтому указанная в формулировке совокупность множеств совпадает с множеством всех так ориентированных кубов, имеющих сторону не больше  $2a$ . Этот набор открытых множеств порождает всю топологию Евклида.  $\square$

**Следствие.** Теоремы 8.1 и 9.1 вместе устанавливают достаточные условия возможности порождения топологии Евклида макропереходом в форме требования к структуре графа.

**Определение 9.5.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеется напыление и построенный на нём граф  $(G, A)$  со счётным числом вершин. Последовательностью перенормировки графа относительно точки  $x \in \mathbb{R}^n$  назовём последовательность конечных множеств  $V_k(x) = D[x, l(k)^{-1}]U(y(x), k)$ ,  $k = 1, \dots$ , где  $y(x)$  — ближайшая к точке  $x$  вершина графа, и  $l(k) = \max\{|z - x| \mid z \in U(y(x), k)\}$ .

Заметим, что  $V_k(x) \subset B(x, 1)$ , где, как и в разделе 7,  $B(x, \delta)$  — шар с центром  $x$  и радиусом  $\delta$ .

**Теорема 9.2.** Рассмотрим произвольную реализацию графа  $(G, A)$  из раздела 4. Коническая индукция порождается множествами вида  $D[x, r]Lim\{V_1(x), \dots\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in (0; 1)$ .

Доказательство. В силу определения напыления в разделах 3 и 5 и генерации графа в разделе 4, верно предельное соотношение  $Lim\{V_1(x), \dots\} = \varphi_-(x) \cap B(x, 1)$  с вероятностью 1. Поэтому, множества, указанные в формулировке теоремы, совпадают с множествами  $\varphi_-(x) \cap B(x, r)$  всех конусов (полных индукторов точки), ограниченных сферами сколь угодно малых радиусов. Этот набор множеств порождает всю коническую индукцию по аксиоме транзитивного объединения.  $\square$

**Замечание 9.1.** Перенормировку графа можно было использовать и в теореме 9.1 вместо перенормировки вложения. Но в теореме 9.2 нельзя заменить перенормировку графа перенормировкой вложения. Это связано с тем, что рёбра графа раздела 4 имеют неограниченную длину.

## 10. Макропереход по вероятностной мере

В работах [3.14],[3.15] предложена схема построения частичного порядка на континуальном множестве путём перехода к предельным вероятностям на растущем графе, определяющем реализацию случайного порядка на конечном подмножестве вершин, при неограниченном монотонном росте числа

вершин. При этом показано, что возникающая в предложенной схеме предельная частичная упорядоченность не может соответствовать частичному порядку причинной связи в пространстве Минковского. Разработанный выше аппарат позволяет реализовать на другой модели указанную программу с получением упорядоченности, соответствующей конической индукции.

**Определение 10.1.** Метрически полное случайное напыление в заданном метрическом пространстве  $(X, d)$  с метрикой  $d$  — это случайная величина  $\eta$ , значениями которой являются счётные подмножества в этом пространстве  $X$ , при выполнении следующего требования. Для любого положительного числа  $\varepsilon > 0$  и для любого конечного подмножества  $M \subset X$ ,  $\#M < \infty$ , будет положительна вероятность того, что в реализации напыления имеется точка в  $\varepsilon$ -окрестности каждой точки этого подмножества.

$$\forall \varepsilon > 0 \forall M \mid M \subset X \ \& \ \#M < \infty$$

$$prob\{\forall m \in M \exists a \in \eta \ d(m, a) < \varepsilon\} > 0 \quad (10.1)$$

В дальнейшем будут рассматриваться метрически полные случайные напыления в евклидовом пространстве заданной конечной размерности  $n + 1$ ,  $n \geq 2$ . Примеры таких напылений содержатся в разделах 3 и 5. В разделе 4 построены графы со случайными ориентированными рёбрами на реализации случайного напыления. Эти графы не имеют циклов с вероятностью 1.

**Определение 10.2.** Пусть определена случайная величина, значения которой суть счётные подмножества метрического пространства  $(X, d)$  на которых как на вершинах задан граф  $\Gamma = (\Gamma_V, \Gamma_A)$  без циклов. Обозначения:  $\Gamma_V$  — множество вершин (напыление в пространстве  $X$ );  $\Gamma_A$  — множество ориентированных рёбер графа. Тогда скажем, что на метрическом пространстве  $(X, d)$  определён случайный счётный граф  $\Gamma$  без циклов. Это означает, что реализация такого графа  $\Gamma$  задаёт на реализации напыления  $\eta$  частичный порядок: для пары точек  $x, y \in \eta$  определим  $x <_{\Gamma} y$ , если и только если имеется путь по рёбрам с учётом ориентации от вершины  $x$  до вершины  $y$ .

**Определение 10.3.** Назовём частичным порядком на пространстве  $(X, d)$ , сопряжённым случайному графу без циклов  $\Gamma$  следующее отношение на  $X^2$ , определённое для пар точек  $x, y \in X$ . Отношение  $x < y$  означает: при условии, что точка  $y$  является вершиной реализации графа, условная вероятность наличия пути в вершину  $y$  из вершины, принадлежащей сколь угодно малой окрестности точки  $x$ , положительна, и это отношение не обратимо.

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$Prob\{\exists a \in \Gamma_V \ d(a, x) < \varepsilon \ \& \ a <_{\Gamma} y \mid y \in \Gamma_V\} > 0; \quad (10.2)$$

$\exists \varepsilon > 0$

$$\text{Prob}\{\exists a \in \Gamma_V \ d(a, y) < \varepsilon \ \& \ y \prec_a x \mid x \in \Gamma_V\} = 0; \quad (10.3)$$

**Лемма 10.1.** Если реализация случайного графа без циклов строится по метрически полному напылению  $\eta$  в метрическом пространстве  $(X, d)$ , и для некоторого открытого по метрике подмножества  $U \subset X$  и некоторой точки  $x \in X$  и её окрестности  $Q$  верно утверждение, что при  $x \in \eta$  для любой точки  $y \in \eta \cap U$  положительна вероятность  $\text{prob}\{(y, x) \in \Gamma_A\} = P_U(x) > 0$  и для любой точки  $q \in \eta \cap Q$   $\text{prob}\{(q, y) \in \Gamma_A\} = 0$ , то верно отношение  $U \prec x$  в случайном частичном порядке, сопряжённом графу.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку  $z \in U$ . Выберем значение  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $U$  открытое множество, то существует некоторое значение  $0 < \delta < \varepsilon$  для которого  $\delta$ -окрестность точки  $z$  целиком принадлежит подмножеству  $U$ . В силу метрической полноты напыления  $\text{Prob}\{\exists y \in \eta \cap U, d(z, y) < \varepsilon\} = P_{\varepsilon, z} > 0$ . Но тогда по условию леммы выполнено (10.2)

$$\text{Prob}\left\{\begin{array}{l} \exists a \in \Gamma_V \ d(a, x) < \varepsilon \ \& \\ \& a \prec_a y \mid y \in \Gamma_V \end{array}\right\} = P_{\varepsilon, z} P_U(x) > 0;$$

Выбрав  $\varepsilon$ -окрестность  $x$  внутри  $Q$  получим из условия леммы выполнение (10.3). Следовательно,  $z \prec x$ .  $\square$

**Замечание 10.1.** Лемма 10.1 обобщается на замыкание  $U^*$  открытого множества  $U$ , поскольку в любой  $\varepsilon/2$ -окрестности точки границы имеются внутренние точки. Поэтому в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки границы вероятность появления точки напыления, внутренней для множества  $U$ , положительна.

**Теорема 10.1.** Частичный порядок, сопряжённый случайному графу конической генерации (раздел 4), определён условием

$$y \prec x \Leftrightarrow y \in \varphi(x) \Leftrightarrow \|y - x\|_M > 0,$$

где  $\varphi(x)$  — полный конический индуктор точки  $x$ .

**Доказательство.** Алгоритм построения графа конической генерации обеспечивает выполнение условий леммы 10.1 для точки  $x$  и множества  $U^* = \varphi(x)$ . Поэтому  $\varphi(x) \subset \{y : y \leq x\}$ . Но в алгоритме конической генерации строятся входящие рёбра только из полного конического индуктора вершины графа. Поэтому, в силу транзитивности отношения индукции, входящие в точку пути по рёбрам могут начинаться только в полном индукторе этой точки. Следовательно,  $\varphi(x) \supset \{y : y \leq x\}$ .

Окончательно получаем  $\varphi(x) = \{y : y \leq x\}$   $\square$

**Замечание 10.2.** Теорема 10.1 не накладывает никаких дополнительных ограничений на параметры

конической генерации. В частности, можно рассмотреть случайный граф с одним входящим и одним исходящим ребром из каждой вершины, если эти рёбра не будут выходить за рамки полного конического индуктора своей точки вхождения. Такой граф заполняет пространство непересекающимися цепочками вершин. Тем не менее, он порождает коническую индукцию любым из указанных выше способов макроперехода, включая построение сопряжённого частичного порядка.

## Заключение

Изложенный материал позволяет сделать вывод, что решение перечисленных задач можно получить, используя аппарат индукторных пространств.

Возможность описания процесса через полную систему инвариантов или через принцип наименьшего действия оказалась эквивалентной требованию, чтобы отношение индукции, сопоставляющее в фазовом пространстве процесса каждой точке проходящие через неё траектории в качестве индукторов, было транзитивным, т. е. образовывало индукторное пространство.

Получить уравнение диффузии, согласованное с требованиями теории относительности, оказалось возможным при помощи описания процесса в двух индукциях на пространстве-времени: евклидовой топологии и бесконечного графа сети явной разностной схемы, сопоставленного каждой точке.

Получить непрерывный макроскопический предел для носителей процессов, определённых на ориентированных графах, в форме евклидова или псевдоевклидова пространства оказалось возможным с помощью генерации порождающей системы индукторов евклидовой или конической индукции из индукторов на графе, вложенном в евклидово пространство, и преобразованном одной из описанных процедур макроперехода.

Можно также отметить относительную простоту и прозрачность полученных решений, что свидетельствует об адекватности выбранного аппарата.

## Литература

- 1.1 В.И. Арнольд Математические методы классической механики. (5-е издание) М.Едиториал УРСС, 2003, ISBN 5-354-00341-5.
- 1.2. Н. Х. Ибрагимов Группы преобразований в математической физике. М. Наука, 1983г, 280с.
  - 2.1. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.
  - 2.2. А. И Райченко, Математическая теория диффузии в приложениях, К., 1981.
  - 2.3. J. Crank, The mathematics of diffusion, 2 ed., Oxf., 1975.
  - 2.4. С. Я. Азаков. Диффузии уравнение. Физическая энциклопедия. [http://femto.com.ua/articles/part\\_1/1083.html](http://femto.com.ua/articles/part_1/1083.html)
  - 2.5. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, 4 изд., М., «Наука», 1972.

3.1. A. V. Koganov. Faithful Representations of Groups by Automorphisms of Topologies. *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 15, No 1, 2008, s. 66-76.

3.2. А. В. Коганов. Индукторные пространства, как средство моделирования. "Вопросы кибернетики" (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) под ред. В. Б. Бетелина, РАН, М., 1999г, С 119-181.

3.3. А. В. Коганов. Автоморфизмы конических индукторных пространств. "Вопросы кибернетики" (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) под ред. В. Б. Бетелина, РАН, М., 1999г, С 182-189.

3.4. А. В. Коганов. Индукторные пространства, как обобщенная модель пространства-времени. Сб. статей «На пути к пониманию феномена времени. Конструкции времени в естествознании.», под редакцией А.П.Левича, М., Прогресс-Традиция, 2009, с. 369-396 (480с, ISBN 5-89826-297-0)

3.5. А. В. Коганов. Переход от римановой к псевдоримановой геометрии через квазиконическую индукцию. Сб. н. т. 3-го Международного симпозиума «Симметрии: теоретический и методический аспекты». Астрахань, 2009, ОГО УДПО АИПКП, ISBN 978-5-8087-0248-6, с. 43-49

3.6. А. В. Коганов. Представление групп автоморфизмами нормальных топологических пространств. \ \ Компьютерные исследования и моделирование, том 1, № 3, 2009, Институт компьютерных исследований (Удмурдский государственный университет), Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, ISSN 2076-7633, с. 243-249.

3.7. В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик. Группы Ли преобразований. // Энциклопедия ВИНТИ, Итоги науки и техники, серия «Современные проблемы математики, фундаментальные направления» Группы и алгебры Ли, вып. 1, т. 20, 1988, п. 4.1, с. 148.

3.8. Luca Bombelli, Joe Henson, Rafael D. Sorkin. Discreteness without symmetry breaking: a theorem. // arXiv: gr-qc/0605006v1, 1 may 2006.

3.9. А. К. Гуц. Хроногеометрия. Аксиоматическая теория относительности. \ \ ГОУ ВПО «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского». 2008, 340с.(ISBN 978-5-9901331-2-9)

3.10. А. Д. Александров. Конусы с транзитивной группой. // ДАН СССР, 1969, Т 189, №4, с. 695-698.

3.11. А. Д. Александров. Отображения семейств конусов. // ДАН СССР, 1971, т. 197, №5, с. 991-994.

3.12. А. Д. Александров. Отображения аффинных пространств с системами конусов. // Зап. науч. семинар, ЛОМИ. 1972, Т 27, с. 7-16.

3.13. Giacomo Mauro D'Ariano, Alessandro Tosini. Emergence of Space-Time from Topologically Homogeneous Causal Networks. // arXiv:1109.0118v1 [gr-qc] 1 Sep 2011

3.14. M.H. Albert and A.M. Frieze, Random graph orders, *Order* 6 (1989), no. 1, 19–30.

3.15. Graham Brightwell, Nicholas Georgiou. Continuum limits for classical sequential growth models. // *Rand. Struct. Alg.* 36 (2010) 218-250.

## Transitive influence area (inductor space) in three tasks of mathematical physics and big system theory

A.V.Koganov

**Abstract.** It consider three tasks at theory of distribution processes which have solutions using transitivity of influence areas in space where the physical process is determined. Original that tasks appear in mathematical physics but later analogical questions appear in other areas of mathematical modeling and in big systems theory. 1. It established necessary and sufficient topological conditions for existence full invariant system in mathematical model of process. 2. It build the diffusion equation in form which is adjusting with limit of spreading speed of penetrate substance. In particle, in physics that mean the adjusting with relativity theory. Classical diffusion equation admit possibility no limit big speed of particles and it do not relativistic. 3. It proposed several strong methods for conversion discrete model of processes which are determined on graphs, to continuous topologies of space-time.

# Динамика последовательного роста ориентированного ациклического бинарного графа

А. Л. Круглый

кандидат физико-математических наук

Рассматривается модель дискретного пространства-времени в микромире. Она представляет собой ориентированный ациклический бинарный граф. Целью модели является описание элементарных частиц, как самоорганизующихся повторяющихся структур графа. Динамика модели заключается в последовательном добавлении новых вершин и ориентированных рёбер. Рост графа определён как Марковский процесс с заданным законом рандомизации. Рассмотрен конкретный пример динамики, в котором вероятности определяются статистическими суммами по путям, связывающим вершины. Обсуждается возможность возникновения самоорганизующихся структур и физическая интерпретация.

## 1. Введение

В настоящей статье рассматривается модель роста ориентированного графа. Целью является моделирование дискретной структуры пространства-времени и материи в микромире. Для обозначения подобной структуры используется термин «предгеометрия» [9], то есть структура физически более глубокого уровня, чем геометрия непрерывного пространства-времени.

Графы как математический аппарат для моделирования носителей реальных распределённых процессов стали использоваться в начале двадцатого века. Основными областями приложений первоначально были статистическая физика, модели в биологии и исследования по теории надёжности. Для моделирования больших областей распределения процесса традиционно используются либо бесконечные регулярно порождённые графы (разновидности сетей), либо растущие графы с конечным числом вершин в каждый момент времени процесса, но неограниченно увеличивающимся с течением времени. Были и промежуточные конструкции, в которых процесс определялся на конечных растущих подграфах некоторого статичного бесконечного графа.

Так, например, построена модель самовоспроизводящихся автоматов Дж. фон Неймана. К этому типу моделей формально можно отнести все растущие графы, в которых построенный подграф уже не меняется в дальнейшем. Исследования надёжности растущих кибернетических сетей проводились в НИИСИ РАН [2, 3].

Попытки моделирования пространства-времени в микромире различными дискретными структурами предпринимались в течение двадцатого века с целью распространения квантовых свойств на пространство и/или время, так как в квантовой механике и квантовой теории поля пространство-время остается классическим. Подробный обзор работ до шестидесятых годов двадцатого века содержится в монографии Вяльцева [1]. Использовались и различные модели графов, например, в моделях

спиновых сетей (spin net) или спиновой пены (spin foam). Модель растущего ориентированного графа предложена автором [5] и Райдотом и Соркиным [21]. Для динамики такого типа используется термин динамика последовательного роста (sequential growth dynamics) [21].

## 2. Модель

### 2.1. Причинностное множество

Рассматриваемая модель является частным случаем причинностного множества (causal set) [10]. Причинностное множество - это по определению частично упорядоченное локально конечное множество. На множестве  $C$  задано бинарное отношение порядка, такое, что для любых элементов  $x, y$  и  $z$ , принадлежащих множеству  $C$ , справедливы следующие аксиомы:

$$x \not\prec x \quad (\text{иррефлексивность}), \quad (1)$$

$$\{x \mid (x \prec y) \wedge (y \prec x)\} = \emptyset \quad (\text{ацикличность}), \quad (2)$$

$$(x \prec y) \wedge (y \prec z) \Rightarrow (x \prec z) \quad (\text{транзитивность}). \quad (3)$$

К аксиомам частичного порядка (1) - (3) добавлена аксиома локальной конечности:

$$|A(x, y)| < \infty \quad (\text{локальная конечность}), \quad (4)$$

где  $A(x, y) = \{z \mid x \prec z \prec y\}$ .

Множество  $A(x, y)$  называется множеством Александра элементов  $x$  и  $y$ . Локальная конечность означает, что множество Александра любой пары элементов содержит конечное число элементов.

Мерхейм [20] и 'т Хоофт [24] выдвинули гипотезу, что пространство-время на микро уровне является причинностным множеством. Отношение порядка дискретных элементов имеет смысл причинной связи. Множество элементов причинностного множества частично упорядочено аналогично множеству событий в пространстве Минковского. Однако в пространстве Минковского множество Александра любых двух причинно связанных событий имеет мощность континуума.

Предполагается, что непрерывное пространство-время возникает только в пределе, когда число дискретных элементов в бесконечно малом объеме пространства-времени стремится к бесконечности. Ситуация аналогична термодинамике, в которой термодинамические величины, например температура и давление газа, определены в пределе бесконечного числа молекул газа в бесконечно малом объеме. В этом смысле пространство и время являются такими же макроскопическими величинами, а причинностное множество называется предгеометрией. С исследованиями по причинностным множествам можно познакомиться по обзору в диссертации автора [7] и ряду более свежих обзоров [23, 11, 14, 25].

## 2.2. Ориентированный ациклический бинарный граф

Рассматриваемая модель является ориентированным ациклическим бинарным графом. Ориентированный граф - это граф, все ребра которого имеют ориентацию. На рисунках такие ребра изображаются стрелками. Бинарный граф - это граф, у которого каждая вершина инцидентна двум входящим и двум выходящим ребрам. На рисунке 1 изображена одна вершина с инцидентными ей ребрами. Получившаяся структура называется  $x$ -структурой. Эта модель предложена Финкельштейном [12]. Ациклический граф - это граф, который не содержит ориентированные циклы. Ниже будут рассматриваться только такие графы, поэтому для краткости будет использоваться термин граф.



Рис. 1.  $X$ -структура

Рассмотрим физический смысл модели. Ребра описывают фундаментальные неделимые частицы. По определению фундаментальные частицы не имеют внутренней структуры и, следовательно, не могут иметь внутренних свойств. Следовательно, свойства ребра полностью определяются его местом в графе. Таким образом, модель описывает реляционную концепцию свойств. Единственное собственное свойство фундаментальной частицы - это существовать. Это свойство имеет два значения: не существовать и существовать. Переход от одного значения к другому является соответственно рождением и уничтожением фундаментальной частицы. Поскольку у фундаментальной частицы нет внутренних свойств, то нет и внутренней эволюции, внутреннего времени. Ребро описывает скачек фундаментальной частицы от момента рождения к моменту уничтожения. В современной физике аналогичным образом ведут себя безмассовые

элементарные частицы, например фотоны. Они движутся со скоростью света, поэтому интервалы собственного времени вдоль их мировых линий равны нулю. Фотон совершает скачек из точки испускания в точку поглощения без внутренней эволюции. Ребро с необходимостью обладает ориентацией от момента рождения к моменту уничтожения.

Вершина описывает элементарное событие. Это взаимодействие фундаментальных частиц. Взаимодействие объектов означает их изменение. Отсутствие каких-либо изменений означает отсутствие взаимодействия. Поскольку единственное свойство фундаментальных частиц - это существовать, то изменение означает рождение или уничтожение. В модели предполагается сохранение числа фундаментальных частиц. Таким образом, элементарное взаимодействие - это взаимодействие двух существующих фундаментальных частиц, их уничтожение и рождение двух новых. Этот процесс описывается  $x$ -структурой.

Предполагается, что все пространство-время представляет собой бесконечный граф. Однако наблюдатель может обладать только конечным объемом информации. Поэтому рассматриваются только конечные графы. В теории графов ребро - это бинарное отношение вершин. Очевидно, что в силу ацикличности часть вершин конечного графа будет иметь меньше чем четыре инцидентных ребра. Если конечный граф рассматривать как подграф большего графа, то эти вершины будут иметь свободные валентности вместо отсутствующих ребер. Свободные валентности - это места для ребер, которые связывают рассматриваемый подграф с соседними частями графа. Далее свободные валентности будут называться внешними ребрами по аналогии с внешними линиями диаграмм Фейнмана. На рисунках они изображаются как ребра, которые инцидентны только одной вершине. Если  $x$ -структуру на рисунке 1 рассматривать как граф, состоящий из одной вершины, то все изображенные ребра являются внешними. Очевидно, что внешние ребра могут быть входящими или выходящими.

Ориентированный маршрут имеет физический смысл причинно-следственной связи. В силу ацикличности графа вершины конечного графа образуют причинностное множество. Рассматриваемая модель является частным случаем причинностного множества. Ребро можно интерпретировать как квант причинно-следственной связи. Ребра конечного графа также образуют причинностное множество. Фиксированному моменту времени соответствует множество причинно не связанных вершин (или ребер). Таким образом, модель не допускает существование структур в фиксированный момент времени. Любой связный граф, который содержит не менее двух вершин, является описанием процесса конечной длительности.

Эта модель рассматривалась в работах автора [5, 6, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19]. В силу удобства в ряде работ использован математический объект, названный  $d$ -графом. В качестве первичных

элементов взяты половинки ребер, названные Финкельштейном и Макколумом монадами [13]. В силу изоморфизма  $d$ -графа и рассматриваемого графа эти модели эквивалентны. В работе [18] исследованы свойства модели. Для дальнейшего понадобится только равенство числа входящих внешних ребер и числа выходящих внешних ребер. Ниже это число будем называть шириной графа.

### 3. Динамика

#### 3.1. Динамика последовательного роста

Рассмотрим общую постановку задачи динамики рассматриваемой модели. Динамика - это способ предсказывать будущую эволюцию системы и реконструировать прошлую. Задана некоторая исходная структура. Она представляет собой конечный граф. С физической точки зрения - это конечный отрезок некоторого процесса. Необходимо определить будущий и прошлый ход этого процесса. Это означает определить структуру частей графа, примыкающих к исходному. Эту структуру можно определять пошагово, добавляя вершины по одной одну за другой. Динамика этого вида для рассматриваемой модели была предложена автором в работе [5].

Добавление одной вершины называется элементарным продолжением. Имеется четыре вида элементарных продолжений. Первый вид заключается в добавлении новой вершины к двум выходящим внешним ребрам (рис. 2). Граф  $G$  изображен прямоугольником, так как он может иметь произвольную структуру. Внешние ребра, участвующие в элементарном продолжении, изображены крупнее. При этом число внешних ребер не меняется. Это элементарное продолжение описывает будущую эволюцию без взаимодействия с окружением.

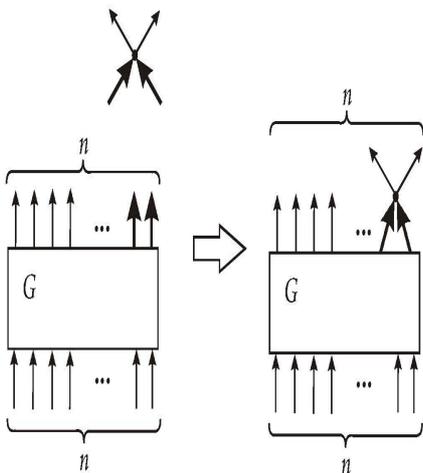


Рис. 2. Элементарное продолжение первого вида

Второй вид заключается в добавлении новой вершины к одному выходящему внешнему ребру (рис. 3). При этом число и выходящих и входящих внешних ребер увеличивается на единицу. Это

элементарное продолжение описывает будущую эволюцию с взаимодействием с окружением.

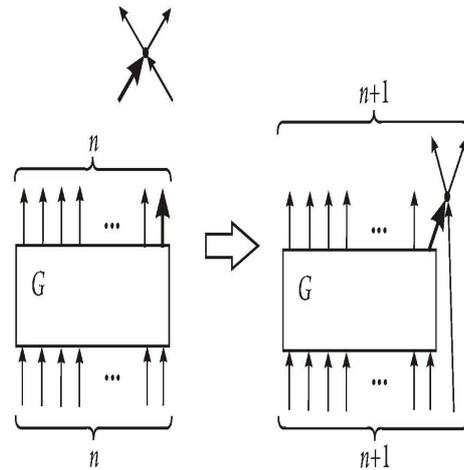


Рис. 3. Элементарное продолжение второго вида

Имеются два симметричных элементарных продолжения в прошлое. Третий вид заключается в добавлении новой вершины к двум входящим внешним ребрам (рис. 4). При этом число внешних ребер не меняется. Это элементарное продолжение описывает прошлую эволюцию без взаимодействия с окружением.

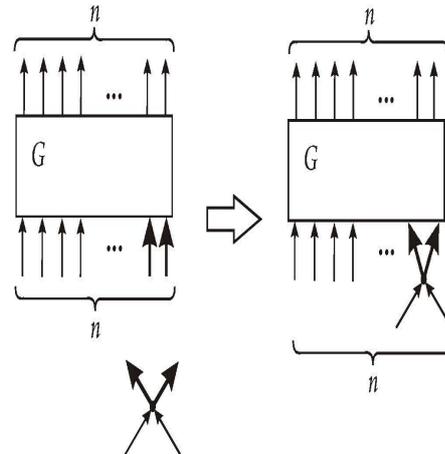


Рис. 4. Элементарное продолжение третьего вида

Четвертый вид заключается в добавлении новой вершины к одному входящему внешнему ребру (рис. 5). При этом число и выходящих и входящих внешних ребер увеличивается на единицу. Это элементарное продолжение описывает прошлую эволюцию с взаимодействием с окружением

Можно доказать, что любой конечный связный граф может быть построен в результате последовательности элементарных продолжений этих четырех видов [18]. Другие виды элементарных продолжений не нужны. Таким образом, рассмотренные элементарные продолжения составляют простейший полный набор, для которого должны быть сформулированы законы динамики.

Предлагаемая динамика предполагается стохастической. Законы динамики позволяют

вычислить только вероятности различных вариантов

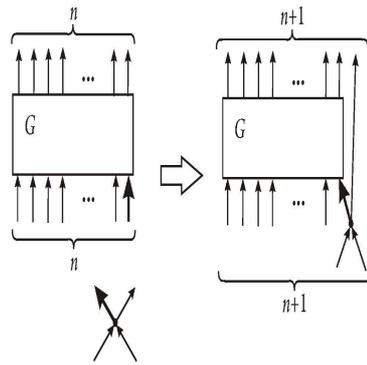


Рис. 5. Элементарное продолжение четвертого вида

добавления новой вершины. В противном случае, если бы законы динамики позволяли однозначно определить каждую следующую добавляемую вершину, то была бы возможность точно определить структуру произвольно большой конечной области вселенной, начав с одной вершины. Тем самым, законы динамики представляли бы собой алгоритм, который заключал бы в себе всю информацию о структуре вселенной.

### 3.2. Амплитуда причинно-следственной связи

Имеется значительный произвол в выборе зависимости вероятности добавления новой вершины от структуры существующего графа. Рассмотрим вариант этой зависимости, непосредственно связанный с бинарной структурой рассматриваемого графа. Предварительно введем амплитуду причинно-следственной связи.

Рассмотрим некоторый ориентированный маршрут в графе (рис. 6). Он начинается в некотором входящем внешнем ребре номер  $\alpha$  и заканчивается в некотором выходящем внешнем ребре номер  $i$ . Здесь и ниже входящие внешние ребра будут нумероваться греческими индексами, а выходящие внешние ребра - латинскими индексами. При этом номера и входящих и выходящих внешних ребер пробегают значения от 1 до  $n$ , где  $n$  - ширина графа (число входящих или выходящих внешних ребер). Выбор ориентированного маршрута означает, что мы последовательно в каждой вершине маршрута выбираем один из двух вариантов его возможного продолжения.

Постулируем, что это равновероятный выбор, который не зависит от структуры графа. Это центральный постулат, на котором основан рассматриваемый вариант динамики последовательного роста.

Таким образом, если ориентированный маршрут содержит  $k$  вершин, то вероятность его выбора равна  $2^{-k}$ .

Введем амплитуду  $a_{i\alpha}$  причинно-следственной связи внешних ребер номер  $\alpha$  и  $i$ . По определению она равна сумме вероятностей всех ориентированных маршрутов между этими ребрами.

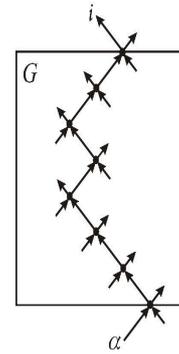


Рис. 6. Ориентированный маршрут как последовательность бинарных выборов

$$a_{\alpha i} = a_{i\alpha} = \sum_{m=1}^M 2^{-k(m)}, \quad (5)$$

где индекс  $m$  нумерует ориентированные маршруты между внешними ребрами с номерами  $\alpha$  и  $i$ ,  $M$  - число этих ориентированных маршрутов, а  $k(m)$  - число вершин в маршруте номер  $m$ . В отличие от комплексных квантовых амплитуд эта амплитуда является неотрицательным числом. Она имеет ясный физический смысл. Причинно-следственная связь внешних ребер тем сильнее, чем больше между ними ориентированных маршрутов, и чем эти маршруты короче. Ниже амплитуды причинно-следственных связей для краткости будут просто называться амплитуды.

### 3.3. Алгоритм вычисления вероятностей

Рассмотрим алгоритм вычисления вероятностей элементарных продолжений, основанный на амплитудах [19]. Он состоит из трех шагов.

На первом шаге выбирается элементарное продолжение в будущее или в прошлое. Предполагается симметрия направления времени процесса. Поэтому определим этот выбор как равновероятный с вероятностями, равными  $1/2$ , независимо от конфигурации графа.

На втором шаге выбирается одно внешнее ребро, к которому присоединяется новая вершина. Этот выбор предполагается равновероятным с вероятностями, равными  $1/n$ , где  $n$  - ширина графа (число входящих или выходящих внешних ребер).

На третьем шаге выбирается второе внешнее ребро, к которому присоединяется новая вершина. Если на втором шаге выбрано выходящее внешнее ребро номер  $i$ , то для вероятности  $p_{ij}$  выбора вторым ребром выходящего внешнего ребра номер  $j$  примем следующее определение

$$P_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} a_{\alpha j}. \quad (6)$$

Рассмотрим математический смысл этого определения. При добавлении новой вершины к выходящим внешним ребрам с номерами  $i$  и  $j$  образуются новые неориентированные циклы.

Рассмотрим циклы специального вида, состоящие из двух ориентированных маршрутов (рис. 7). Назовем такие циклы петлями. Припишем каждой петле вес, равный произведению вероятностей составляющих ее ориентированных маршрутов до присоединения новой вершины. Тогда сумма петель, образованных новой вершиной, присоединенной к выходящим внешним ребрам с номерами  $i$  и  $j$ , и начинающихся во входящем внешнем ребре номер  $\alpha$  равна  $a_{i\alpha}a_{\alpha j}$ . Сумма всех петель, образованных добавлением новой вершины, получается суммированием по  $\alpha$ . В итоге мы получаем определение (6).

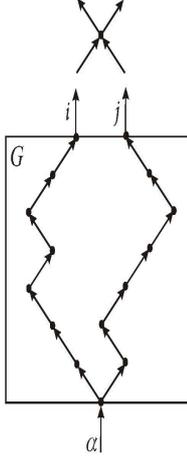


Рис. 7. Новая петля, возникающая при добавлении вершины

Сумма по всем ориентированным маршрутам, начинающимся в одном и том же ребре, всегда равна единице. Поэтому, вероятность (6) будет правильно нормирована, если учитываются вероятности с  $i=j$ . В этом случае оба ребра, к которым присоединяется новая вершина, совпадают. Эту вероятность следует идентифицировать с вероятностью элементарного продолжения второго вида. Таким образом, формула (6) задает вероятности элементарных продолжений в будущее обоих видов.

Аналогично определим вероятности элементарных продолжений в прошлое.

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} a_{i\beta}. \quad (7)$$

Запишем вероятности элементарных продолжений с учетом всех трех шагов алгоритма. Для вероятности  $P_{ij}$  элементарного продолжения первого вида имеем

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{2n} \left( \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} a_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^n a_{j\alpha} a_{\alpha i} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} a_{\alpha j}, \text{ при } i \neq j. \end{aligned} \quad (8)$$

Два слагаемых получаются в силу того, что одно и то же элементарное продолжение получается двумя способами. Можно на втором шаге выбрать ребро номер  $i$ , а на третьем шаге - ребро номер  $j$ , а можно выбрать ребра в обратном порядке. Оба слагаемых равны, так как являются суммами одних и тех же

петель. Для вероятности  $P_{ij}$  элементарного продолжения второго вида имеем

$$P_{ii} = \frac{1}{2n} \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} a_{\alpha i}. \quad (9)$$

Аналогичные формулы имеем для вероятностей элементарных продолжений в прошлое. Для вероятности  $P_{\alpha\beta}$  элементарного продолжения третьего вида имеем

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2n} \left( \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} a_{i\beta} + \sum_{i=1}^n a_{\beta i} a_{i\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} a_{i\beta}, \text{ при } \alpha \neq \beta. \end{aligned} \quad (10)$$

Для вероятности  $P_{\alpha\alpha}$  элементарного продолжения четвертого вида имеем

$$P_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} a_{i\alpha}. \quad (11)$$

Уравнения (6) и (7) могут быть записаны в матричной форме. Введем матрицу амплитуд  $\mathbf{a}$ . Ниже все матрицы будут обозначаться латинскими буквами жирным шрифтом. По определению, ее элемент в строке номер  $i$  и столбце номер  $\alpha$  есть амплитуда  $a_{i\alpha}$ . Это квадратная матрица размера, равного ширине графа. Введем матрицы вероятностей в будущее  $\mathbf{p}_f$  и в прошлое  $\mathbf{p}_p$ . По определению элементами  $\mathbf{p}_f$  являются вероятности  $p_{ij}$ , а элементами  $\mathbf{p}_p$  - вероятности  $p_{\alpha\beta}$ . Это тоже квадратные матрицы размера, равного ширине графа. Уравнения (6) и (7) в матричной форме имеют вид

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{a}\mathbf{a}^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{a}^T \mathbf{a}. \quad (13)$$

В представленной динамике динамическая причинность согласована с частичным порядком вершин. Вероятность участия в элементарном продолжении двух выходящих внешних ребер зависит только от структуры их общего прошлого и связи этого общего прошлого с каждым из этих ребер. От остальных частей графа зависит только нормировочный множитель, который обратно пропорционален ширине графа. Соответственно, вероятность добавления новой вершины в будущее зависит только от структуры ее прошлого. Аналогично, вероятность добавления новой вершины в прошлое зависит только от структуры ее будущего. Физический смысл предлагаемого алгоритма более подробно рассмотрен в параграфе 4.2.

### 3.4. Алгоритм вычисления матрицы амплитуд

Вероятности всех элементарных продолжений любого графа можно получить, если известна матрица амплитуд этого графа. Рассмотрим итерационный алгоритм вычисления матрицы амплитуд.

Граф, состоящий из одной вершины имеет ширину 2 (рис. 1). Обозначим его  $G_{1,2}$ . Для его матрицы амплитуд  $\mathbf{a}(G_{1,2})$  имеем

$$\mathbf{a}(G_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Рассмотрим граф  $G_{N,n}$  ширины  $n$ , состоящий из  $N$  вершин. Пусть для него известна матрица  $\mathbf{a}(G_{N,n})$ . Рассчитаем новую матрицу амплитуд при каждом из четырех видов добавления одной вершины.

Рассмотрим элементарное продолжение первого вида (рис. 2). При добавлении вершины к двум выходящим внешним ребрам с номерами  $i$  и  $j$  ширина графа и размер матрицы амплитуд не меняются. Два выходящих внешних ребра становятся внутренними ребрами, и возникают два новых выходящих внешних ребра. Присвоим новым выходящим внешним ребрам те же номера  $i$  и  $j$ . Не имеет значения, какому из новых выходящих внешних ребер, какой номер присвоить, так как эти ребра эквивалентны. При этом каждая строка с номерами  $i$  и  $j$  новой матрицы равна среднему арифметическому строк с номерами  $i$  и  $j$  исходной матрицы. Для элементов этих двух строк имеем

$$\begin{aligned} a_{i\alpha}(G_{N+1,n}) &= a_{j\alpha}(G_{N+1,n}) = \\ &= \frac{1}{2}(a_{i\alpha}(G_{N,n}) + a_{j\alpha}(G_{N,n})), \end{aligned} \quad (15)$$

где индексы  $i$  и  $j$  фиксированы, а индекс  $\alpha$  пробегает значения от 1 до  $n$ .

Рассмотрим элементарное продолжение второго вида (рис. 3). При добавлении вершины к одному выходящему внешнему ребру с номером  $i$  ширина графа и размер матрицы амплитуд увеличиваются на 1. Одно выходящее внешнее ребро становится внутренним ребром, и возникают два новых выходящих внешних ребра и одно новое входящее внешнее ребро. Присвоим одному новому выходящему внешнему ребру номер  $i$ . Не имеет значения, какому из новых выходящих внешних ребер номер присвоить, так как эти ребра эквивалентны. Оставшемуся выходящему внешнему ребру присвоим номер  $n+1$ . Входящему внешнему ребру также присвоим номер  $n+1$ . При этом все элементы строки с номером  $i$  делятся на 2, им приравниваются элементы строки с номером  $n+1$ . В столбце с номером  $n+1$  элементы с номерами  $(i, n+1)$  и  $(n+1, n+1)$  равны  $1/2$ , а остальные элементы этого столбца равны нулю. Имеем

$$\begin{aligned} a_{i\alpha}(G_{N+1,n+1}) &= a_{(n+1)\alpha}(G_{N+1,n+1}) = \\ &= \frac{1}{2}a_{i\alpha}(G_{N,n}), \end{aligned} \quad (16)$$

где индекс  $i$  фиксирован, а индекс  $\alpha$  пробегает значения от 1 до  $n$ .

$$a_{i(n+1)}(G_{N+1,n+1}) = a_{(n+1)(n+1)}(G_{N+1,n+1}) = \frac{1}{2}, \quad (17)$$

$$a_{s(n+1)}(G_{N+1,n+1}) = 0, \quad (18)$$

где индекс  $i$  фиксирован, а индекс  $s$  пробегает значения от 1 до  $i-1$  и от  $i+1$  до  $n$ .

Рассмотрим элементарное продолжение третьего вида (рис. 4). При добавлении вершины к двум входящим внешним ребрам с номерами  $\alpha$  и  $\beta$  ширина графа и размер матрицы амплитуд не меняются. Два

входящих внешних ребра становятся внутренними ребрами, и возникают два новых входящих внешних ребра. Присвоим новым входящим внешним ребрам номера  $\alpha$  и  $\beta$ . Не имеет значения, какому из новых входящих внешних ребер, какой номер присвоить, так как эти ребра эквивалентны. При этом каждый столбец с номерами  $\alpha$  и  $\beta$  новой матрицы равен среднему арифметическому столбцов с номерами  $\alpha$  и  $\beta$  исходной матрицы. Для элементов этих двух столбцов имеем

$$\begin{aligned} a_{i\alpha}(G_{N+1,n}) &= a_{i\beta}(G_{N+1,n}) = \\ &= \frac{1}{2}(a_{i\alpha}(G_{N,n}) + a_{i\beta}(G_{N,n})), \end{aligned} \quad (19)$$

где индексы  $\alpha$  и  $\beta$  фиксированы, а индекс  $i$  пробегает значения от 1 до  $n$ .

Рассмотрим элементарное продолжение третьего вида (рис. 5). При добавлении вершины к одному входящему внешнему ребру с номером  $\alpha$  ширина графа и размер матрицы амплитуд увеличиваются на 1. Одно входящее внешнее ребро становится внутренним ребром, и возникают два новых входящих внешних ребра и одно новое выходящее внешнее ребро. Присвоим одному новому входящему внешнему ребру номер  $\alpha$ . Не имеет значения, какому из новых входящих внешних ребер номер присвоить, так как эти ребра эквивалентны. Оставшемуся входящему внешнему ребру присвоим номер  $n+1$ . Входящему внешнему ребру также присвоим номер  $n+1$ . При этом все элементы столбца с номером  $\alpha$  делятся на 2, им приравниваются элементы столбца с номером  $n+1$ . В строке с номером  $n+1$  элементы с номерами  $(n+1, \alpha)$  и  $(n+1, n+1)$  равны  $1/2$ , а остальные элементы этой строки равны нулю. Имеем

$$\begin{aligned} a_{i\alpha}(G_{N+1,n+1}) &= a_{i(n+1)}(G_{N+1,n+1}) = \\ &= \frac{1}{2}a_{i\alpha}(G_{N,n}), \end{aligned} \quad (20)$$

где индекс  $\alpha$  фиксирован, а индекс  $i$  пробегает значения от 1 до  $n$ .

$$a_{(n+1)\alpha}(G_{N+1,n+1}) = a_{(n+1)(n+1)}(G_{N+1,n+1}) = \frac{1}{2}, \quad (21)$$

$$a_{(n+1)\beta}(G_{N+1,n+1}) = 0, \quad (22)$$

где индекс  $\alpha$  фиксирован, а индекс  $\beta$  пробегает значения от 1 до  $\alpha-1$  и от  $\alpha+1$  до  $n$ .

Построенный алгоритм позволяет рассчитать матрицу амплитуд любого графа. Он может быть удобен для численного моделирования. Однако матрица амплитуд имеет переменный размер, а аналитические исследования удобнее проводить с матрицами фиксированного размера. Запишем полученный алгоритм в другой форме.

### 3.5. Элементарные операторы эволюции

Рассмотрим последовательный рост, результатом которого является граф  $G_{N,n}$  ширины  $n$ , состоящий из  $N$  вершин. Его можно рассматривать как результат роста за  $N$  шагов, начиная с пустого графа  $G_{0,0}$ .



Элементарные продолжения первого и третьего вида попарно усредняют амплитуды. Если в процессе последовательного роста имеется последовательность элементарных продолжений только первого и третьего вида, то происходит асимптотическое сближение значений вероятностей различных вариантов элементарных продолжений. Если, новые вершины добавляются ко всем возможным парам внешних ребер, то все вероятности элементарных продолжений стремятся к  $1/n$ , где  $n$  - ширина графа. Если, новые вершины добавляются ко всем возможным парам внешних ребер только в пределах подграфов, то для каждого подграфа все вероятности элементарных продолжений стремятся к  $1/n_1$ , где  $n_1$  - ширина подграфа. Такое поведение соответствует свойствам наблюдаемой вселенной. Элементарные продолжения первого и третьего вида описывают развитие процесса без взаимодействия с окружением. Такая система стремится к термодинамическому равновесию. В рассматриваемой модели это состояние равной вероятности любых вариантов элементарных продолжений. При этом любые регулярные структуры разрушаются, а новые не возникают.

Структуры возникают за счет взаимодействия с окружением. В рассматриваемой модели это элементарные продолжения второго и четвертого вида. Для возникновения структуры необходимо наличие небольшого количества преимущественных вариантов последовательного роста с вероятностями, значительно превышающими вероятности прочих вариантов. В графе большой ширины при  $n$  много больше 1 среднее значение вероятности элементарного продолжения мало. При элементарных взаимодействиях второго и четвертого вида в матрицу амплитуд добавляются элементы с максимальными значениями, равными  $1/2$ . При последующих элементарных взаимодействиях первого и третьего вида эти элементы усредняются с другими. В результате возникает небольшая группа элементов матрицы амплитуд, значительно превосходящих остальные. Они обеспечивают наличие небольшой группы преимущественных вариантов элементарных продолжений, с доминирующими вероятностями. Приводит ли описанный механизм к возникновению самоорганизующихся структур, требует дальнейшего исследования.

В настоящий момент вопросы самоорганизации исследуются автором совместно с И. В. Степаняном методом численного моделирования, так как рассматриваемая модель удобна для численного моделирования. Первые результаты показывают возникновение структуры, внешне напоминающей мировую линию, окруженную более разреженными участками графа. При этом вероятности ведут себя, как описано выше. Более подробное изложение результатов выходит за рамки настоящей статьи и будет приведено в последующих работах.

Наблюдатель не может непосредственно наблюдать структуру графа. Проводя серии одинаковых экспериментов, он может только

определять вероятности различных событий, которые состоят из ряда элементарных продолжений. Графы, имеющие разную структуру, но одинаковые матрицы амплитуд, неразличимы для наблюдателя. Простейшим примером является двойное ребро (рис. 8).



Рис. 8. Двойное ребро

Динамика допускает добавление новых вершин с образованием двойного ребра. При этом матрица амплитуд не меняется. Матрица амплитуд не меняется, если любую вершину графа заменить парой вершин, соединенных двойным ребром, или произвести обратную замену. Соответственно, элементарные операторы эволюции являются идемпотентами.

$$e(i j)e(i j) = e(i j). \quad (31)$$

Таким образом, двойные ребра не наблюдаемы. Это не означает, что двойные ребра можно исключить из рассмотрения. Если вероятность их образования приравнять нулю, то нарушится нормировка оставшихся вероятностей.

Графы, различающиеся только нумерацией элементов (вершин или ребер), считаются тождественными, так как нумерация не имеет физического смысла. Графы, различающиеся только нумерацией внешних ребер, имеют матрицы амплитуд, которые получаются друг из друга перестановкой строк и соответствующих столбцов. Такие матрицы описывают один и тот же физический процесс.

## 4. Физическая интерпретация модели

### 4.1. Интерпретация динамики

Рассмотрим физическую интерпретацию динамики. Динамика содержит два принципиально различных потока причин и следствий. Один поток - это частичный порядок вершин в графе. Он аналогичен частичному порядку событий в пространстве Минковского. Другой поток - это линейно упорядоченная последовательность элементарных продолжений. Он непосредственно не связан с частичным порядком вершин, так как новые вершины могут добавляться и к входящим внешним ребрам. Таким образом, модель содержит два принципиально различных времени. Обратимое время процессов (частичный порядок вершин) аналогично временной координате в пространстве-

времени. Только оно дискретно. Время (последовательность) элементарных продолжений асимметрично и направлено в сторону роста графа.

Выше конечный граф интерпретировался как известная наблюдателю информация. Обладая этой информацией, наблюдатель может по законам динамики вычислить вероятности различных добавлений новой вершины. Однозначный выбор варианта добавления новой вершины является увеличением информированности наблюдателя. Новая информация получается в результате измерения. Поскольку информация о добавлении одной вершины является минимально возможным объемом информации, то элементарное продолжение должно интерпретироваться как результат элементарного измерения. При этом сама модель правомерна только в предположении, что элементарные измерения принципиально возможны, то есть наблюдатель в принципе может определить структуру изучаемого графа.

В квантовой теории наблюдатель играет важную роль. В предлагаемой динамике роль наблюдателя максимальна. Вся динамика есть процесс получения наблюдателем информации. Без наблюдателя никакой динамики нет, а вселенная представляет собой статичную картину графа с фиксированной структурой. Аналогично, в общей теории относительности вселенная представляет собой фиксированный четырехмерный континуум.

Таким образом, модель включает идеального наблюдателя. Он может обладать только конечным объемом информации. Его единственная характеристика в фиксированный момент его субъективного времени - это имеющаяся у него информация. Идеальный наблюдатель увеличивает свою информацию дискретными порциями путем элементарных измерений.

Это составляет содержание динамики, которая может быть описана количеством информации, получаемым идеальным наблюдателем с каждым элементарным измерением. Последовательность элементарных продолжений есть субъективное время наблюдателя. Оно строго однонаправлено в сторону увеличения количества информации. Идеальный наблюдатель ничего не забывает. Напротив, время процесса (частичный порядок) симметрично.

В квантовой теории состояния до и после измерения не интерферируют. Поэтому результаты серии последовательных измерений представляют собой классическую стохастическую последовательность. Аналогично, предполагается, что для элементарных продолжений справедлива классическая теория вероятности. Поскольку на каждом шаге последовательного роста имеется только конечное множество возможных элементарных продолжений, то для любой конечной последовательности шагов справедлива элементарная теория вероятности [4].

Альтернативный взгляд на динамику последовательного роста предлагается в работе [22].

## 4.2. Интерпретация алгоритма

В параграфе 3.3 описан конкретный алгоритм расчета вероятностей элементарных продолжений. Рассмотрим его физический смысл.

Первые два шага алгоритма являются равновероятным выбором одного внешнего ребра, которое будет участвовать в очередном элементарном продолжении. Выбор элементарного продолжения есть факт получения идеальным наблюдателем минимальной порции информации. Следовательно, первые два шага алгоритма означают, что идеальный наблюдатель равновероятно получает новую порцию информации из любой области изучаемого процесса, смежной с известной областью.

Рассмотрим физический смысл третьего шага алгоритма для расчета вероятностей элементарных продолжений. Рассмотрим физический смысл алгоритма для вычисления вероятности элементарного продолжения первого вида, так как алгоритм для вычисления вероятности элементарного продолжения второго вида получается из условия нормировки, а алгоритмы для вычисления вероятности элементарных продолжений третьего и четвертого вида получаются обращением времени процесса (направления отношения частичного порядка).

Элементарное продолжение первого вида описывает возникновение в будущем новой связи между двумя выходящими внешними ребрами. Естественно предположить, что вероятность этой связи тем больше, чем больше была связь этих ребер в прошлом. Причинность является не просто частичным порядком элементов, а является причинностью в физическом смысле, если она лежит в основе динамики. Таким образом, под связью выходящих внешних ребер в прошлом понимается причинно-следственная связь. При этом сами выходящие внешние ребра причинно не связаны.

Рассмотрим физическую связь двух причинно не связанных событий в континуальном пространстве-времени на простом примере двумерного пространства Минковского (рис. 9).

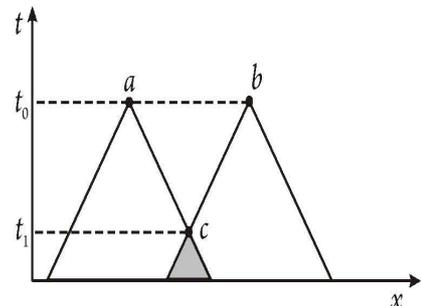


Рис. 9. Связь через общее прошлое

Точки  $a$  и  $b$  одновременны в выбранной системе отсчета и соответствуют моменту времени  $t_0$ . Они по определению не могут иметь какую-либо физическую связь в момент  $t_0$ . Их связь осуществляется только за счет пересечения их световых конусов прошлого (заштрихованный

треугольник на рисунке). Ближайшей точкой, которая имеет связь с обеими точками  $a$  и  $b$ , является точка  $c$  в момент времени  $t_1$ . Таким образом, интенсивность связи точек  $a$  и  $b$  должна определяться структурой их общего прошлого и интенсивностью причинно-следственных связей этого общего прошлого с каждой из точек  $a$  и  $b$ . В простейшем случае связь точек  $a$  и  $b$  должна уменьшаться с ростом интервала времени  $t_0-t_1$ .

Зависимость такого вида и реализована в третьем шаге алгоритма. В формуле (6) суммирование фактически ведется только по входящим внешним ребрам из общего прошлого выходящих внешних ребер с номерами  $i$  и  $j$ . Остальные слагаемые равны нулю, так как равна нулю амплитуда причинно-следственной связи соответствующего входящего внешнего ребра хотя бы с одним из выходящих внешних ребер с номерами  $i$  и  $j$ . В рассматриваемой модели интенсивность причинно-следственной связи описывается амплитудой причинно-следственной связи. Таким образом, связь входящего внешнего ребра номер  $a$  из общего прошлого выходящих внешних ребер с номерами  $i$  и  $j$  описывается произведением амплитуд причинно-следственной связи ребра номер  $a$  с каждым из ребер с номерами  $i$  и  $j$ .

Конкретный вид формулы (6) основан на гипотезе, что каждое ребро вносит одинаковый вклад в причинно-следственную связь независимо от структуры других частей графа. В этом смысле связи в рассматриваемой модели локальны.

Рассмотрим выходящее внешнее ребро номер  $i$ , которое на втором шаге алгоритма выбрано участвующим в элементарном продолжении. Обозначим через  $p_i(1)$  вероятность участия этого ребра в элементарном продолжении первого вида. Ребро номер  $i$  инцидентно некоторой вершине. Этой вершине инцидентны два входящих ребра, каждое из которых может быть внешним или внутренним. Присвоим им номера  $a$  и  $b$ . Таким образом, в ребре номер  $i$  в общем случае заканчиваются две группы ориентированных маршрутов. Одна группа проходит через ребро номер  $a$ , а другая - через ребро номер  $b$ . Ребро номер  $i$  может быть связано с общим прошлым со вторым ребром, участвующим в элементарном продолжении, как посредством ребра номер  $a$ , так и посредством ребра номер  $b$ . По предположению, каждое ребро осуществляет связь независимо, то есть  $p_i(1)$  есть сумма двух слагаемых, равных  $p_i(1)/2$ . Каждое слагаемое соответствует связи через ребро номер  $a$  или  $b$ .

Если ребро номер  $a$  или  $b$  является входящим внешним ребром, то для него процедура заканчивается. Если ребро номер  $a$  или  $b$  является внутренним ребром, то для него рассуждения повторяются. Пусть для определенности это будет ребро номер  $a$ . Оно является входящим инцидентным ребром для некоторой вершины. Этой вершине инцидентны два входящих ребра. Присвоим им номера  $c$  и  $d$ . Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что каждый из маршрутов  $ac$  или  $ad$  дает слагаемое в  $p_i(1)$  равное  $p_i(1)/4$ . Таким образом, связь посредством ориентированного маршрута дает слагаемое в  $p_i(1)$  равное  $2^{-k}p_i(1)$ , где  $k$

число ребер в маршруте за вычетом фиксированного ребра номер  $i$ , то есть, число вершин в маршруте.

Рассмотрим некоторое ребро номер  $x$ , которое связано ориентированными маршрутами с ребром номер  $i$ . Ребро номер  $x$  является входящим инцидентным ребром некоторой вершины. Эта вершина имеет два выходящих ребра, которым присвоим номера  $y$  и  $z$ . Если ребро номер  $x$  связано с ребром номер  $i$  только через одно из ребер с номерами  $y$  или  $z$ , то этот случай уже рассмотрен. Рассмотрим связь через оба ребра. Пусть имеется только один ориентированный маршрут из ребра номер  $y$  в ребро номер  $i$ , и пусть имеется только один ориентированный маршрут из ребра номер  $z$  в ребро номер  $i$ . Тогда с силу независимости связи через ребра с номерами  $y$  и  $z$  оба ориентированных маршрута дают слагаемое в  $p_i(1)$  равное  $p_i(1)(2^{-k(y)}+2^{-k(z)})$ . Здесь  $k(y)$  - это число вершин в ориентированном маршруте, который проходит из ребра номер  $x$  в ребро номер  $i$  через ребро номер  $y$ . Аналогично,  $k(z)$  - это число вершин в ориентированном маршруте, который проходит из ребра номер  $x$  в ребро номер  $i$  через ребро номер  $z$ . В каждой вершине маршруты сходятся попарно. Поэтому, если повторить рассуждения последовательно для каждой вершины из множества Александрова ребер с номерами  $x$  и  $i$ , то вероятность связи ребра номер  $i$  через ребро номер  $x$  пропорциональна их амплитуде и равна  $p_i(1)a_{ix}$ .

Последовательно двигаясь из ребра номер  $i$  по любому ориентированному маршруту против его направления, мы за конечное число шагов приходим к входящему внешнему ребру. По построению сумма амплитуд ребра номер  $i$  со всеми входящими внешними ребрами в его прошлом равна 1. Таким образом, в силу условия нормировки связь выходящих внешних ребер осуществляется только через общие входящие внешние ребра.

Зависимость вероятности добавления новой вершины к двум выходящим внешним ребрам с номерами  $i$  и  $j$  от их общего прошлого должна иметь вид симметричный относительно этих ребер. Таким образом, если входящее внешнее ребро номер  $a$  принадлежит общему прошлому ребер с номерами  $i$  и  $j$ , то оно вносит в эту вероятность вклад  $cp_i(1)a_{ia}a_{ja}$ , где  $c$  - некоторый нормировочный коэффициент. Поскольку каждое входящее внешнее ребро дает вклад в эту вероятность независимо от других входящих внешних ребер, то эта вероятность равна сумме слагаемых этого вида, где суммирование ведется по всем входящим внешним ребрам, которые принадлежат общему прошлому ребер с номерами  $i$  и  $j$ . Суммирование можно распространить на все входящие внешние ребра, но остальные дают нулевой вклад, так как соответствующие слагаемые содержат нулевые амплитуды.

Сумма амплитуд входящего внешнего ребра номер  $a$  со всеми выходящими внешними ребрами равна 1. Таким образом, если сумму слагаемых вида  $cp_i(1)a_{ia}a_{ja}$  при  $i=j$  идентифицировать с амплитудой элементарного продолжения второго вида, которое заключается в добавлении вершины только к ребру номер  $i$ , то  $c=1$ , а вместо  $p_i(1)$  должна стоять

вероятность участия ребра номер  $i$  в элементарном продолжении первого или второго вида, то есть в любом возможном для него элементарном продолжении. Как было показано в параграфе 3.3 она равна  $1/(2n)$ .

Для входящих внешних ребер рассуждения полностью аналогичны с заменой общего прошлого на общее будущее. Пршлую эволюцию мы реконструируем по известным последствиям в будущем.

Мы видим, что рассмотренный алгоритм вычисления вероятностей основан на двух идеях. Первая идея - это причинность. Связь двух ребер (квантов причинно-следственной связи) осуществляется только через их общее прошлое или будущее. Вторая идея - это локальность связи, то есть независимость вклада каждого ребра от структуры графа. Предлагаемые формулы исчисления вероятностей получаются из комбинаторики, соображений симметрии и нормировки вероятностей.

## 5. Заключение

Свойства симметрии матрицы амплитуд должны играть ключевую роль в интерпретации результатов динамики. Частицы предполагаются повторяющимися подграфами с симметриями. Им должны соответствовать симметрии подматриц матрицы амплитуд.

Рассмотренный вариант динамики не содержит свободных параметров. В общем случае могут быть не равновероятными добавление вершины в прошлое и в будущее. Связь этого обобщения с асимметрией направления времени требует дальнейшего изучения.

Возможно, что динамика рассмотренного вида лежит в основании квантовых свойств микромира. Вероятности являются функциями петель, то есть маршрутов, которые начинаются и заканчиваются в новой добавляемой вершине. Эти петли являются произведениями пар ориентированного и противоположно ориентированного маршрутов, что описывается соотношениями (6) и (7). При этом петли вторичны по отношению к ориентированным маршрутам. Уравнение эволюции (30) записывается для амплитуд, то есть для маршрутов. Ситуация похожа на квантовое описание, где вероятность является произведением амплитуды на комплексно сопряженную амплитуду, а уравнения динамики (Шредингера или Дирака) записываются для амплитуд.

Если рассмотренная динамика претендует на адекватное описание элементарных частиц, то должно быть соответствие между этой моделью и квантовой теорией поля. При этом должны быть получены комплексные амплитуды. Один из возможных вариантов решения этой задачи основан на точке зрения, что комплексные амплитуды являются эффективным феноменологическим способом описания. Комплексная фаза описывает периодический процесс. Аналогично, в электротехнике переменный ток описывается

комплексными величинами. Однако такой способ не позволяет описывать внутренний механизм периодического процесса. В случае переменного тока внутренний механизм - это движение зарядов в проводнике. Комплексные напряжение и сила тока не описывают детали движения зарядов и их взаимодействия с веществом проводника. Рассматриваемая модель направлена на описание внутренней механики частиц как повторяющихся процессов. Термин "повторяющийся" использован вместо термина "периодический", так как о периодичности процесса можно говорить только после введения в модель интервалов времени. В модели можно рассматривать различные повторяющиеся величины. Простейший пример - это ориентированный маршрут. Ребро является естественным шагом этого процесса. Можно рассмотреть отношение числа ребер в различных ориентированных маршрутах, соединяющих две вершины. Вдоль ориентированных маршрутов могут быть заданы различные величины, изменение которых может иметь периодическую компоненту. Наибольший интерес представляют амплитуды причинно-следственных связей, так как они предполагаются прообразами квантовых амплитуд. Определение амплитуды причинно-следственных связей может быть обобщено с внешних ребер на произвольные ребра или вершины. Зафиксируем одно ребро в качестве начального ребра ориентированного маршрута, а в качестве другого конца этого маршрута будем рассматривать различные ребра. В этом случае амплитуда оказывается функцией переменного конечного ребра.

Также должно быть построено непрерывное пространство-время. Этой задаче посвящены многие работы по причинностным множествам (см. ссылки в параграфе 2.1). Наиболее сложным вопросом представляется получение правильной размерности  $3+1$ .

Автор выражает благодарность Александру Владимировичу Коганову и Владимиру Всеволодовичу Кассандрову за многолетний интерес к данному направлению исследований и плодотворные обсуждения, а также Ивану Викторовичу Степаняну за сотрудничество в численном моделировании, которое осталось за рамками настоящей статьи.

## Литература

1. А. Н. Вяльцев Дискретное пространство-время. М.: Наука, 432 с., 1965.
2. А. В. Коганов, А. Н. Сазонов Фазовый переход наработки на отказ в растущих вычислительных сетях. \ \ Программные продукты и системы, приложение к международному журналу *Проблемы теории и практики управления*, №4, 2008, с. 38-43.
3. А. В. Коганов, А. Н. Сазонов Анализ отказоустойчивости параллельных кольцевых вычислительных систем. \ \ Программные продукты и системы, приложение к международному

- журналу *Проблемы теории и практики управления*, №2, 2010, с. 8-13.
4. А.Н.Колмогоров Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 119 с., 1974.
  5. А.Л.Круглый Модель дискретного пространства-времени. М.: Монолог, 56 с., 1998.
  6. А.Л.Круглый Модель динамики дискретного пространства-времени. М.: Монолог, 88 с., 2000.
  7. А.Л.Круглый Динамика ориентированного графа в модели Соркина - Финкельштейна. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: Российский университет дружбы народов, 106 с., 2004.
  8. А.Л.Круглый Принципы дискретной механики микромира. В кн. Проблемы физики и физических технологий: Сборник научных трудов. Под ред. В.А. Лурье. М.: Изд-во МГОУ, 2010, с. 65-161.
  9. Ч. Мизнер, К.Торн, Уиллер Дж., Гравитация, т. 3. - Бишкек: Айнштайн, 510 с., 1997.
  10. L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer and R.D. Sorkin Space-time as a causal set \ Physical Review Letters. 59, 1987, p. 521-524.
  11. F. Dowker, Causal sets as discrete spacetime. \ Contemp. Phys. 47, 2006, p. 1-9.
  12. D. Finkelstein, "Superconducting" causal net. \ Int. J. Theor. Phys. 27, 1988, p. 473-519.
  13. D. Finkelstein and G. McCollum, Unified quantum theory, in Quantum theory and the structures of time and space V.1, ed. by L. Castell, M. Drieschner, and C. F. von Weizsäcker (München, Vienna, Hauser, 1975), p. 15-54.
  14. J. Henson, The causal set approach to quantum gravity, in Approaches to Quantum Gravity: Towards a New Understanding of Space, Time and Matter, chapter 21, ed. by D. Oriti (Cambridge University Press, Cambridge, 2009), (arXiv:gr-qc/0601121).
  15. A. L. Krugly, Discrete space-time. \ Int. J. Theor. Phys. 39(4), 2000, p. 975 – 984.
  16. A. L. Krugly, Causal set dynamics and elementary particles. \ Int. J. Theor. Phys. 41(1), 2002, p. 1-37.
  17. A. L. Krugly, Discrete mechanics: a sequential growth dynamics for causal sets, and a self-organization of particles, arXiv: 1004.5077 [gr-qc].
  18. A. L. Krugly, Discrete mechanics: a kinematics for a particular case of causal sets, arXiv: 1008.5169 [gr-qc].
  19. A. L. Krugly, Discrete mechanics: a sequential growth dynamics for causal sets that is based on binary alternatives, arXiv: 1106.6269 [gr-qc].
  20. J. Myrheim Statistical Geometry. CERN preprint TH-2538, 1978, 13 p.
  21. D. P. Rideout and R. D. Sorkin, A classical sequential growth dynamics for causal sets. \ Phys. Rev. D61, 2000, p. 024002-1 - 024002-16 (arXiv: gr-qc/9904062).
  22. R. D. Sorkin, Relativity theory does not imply that the future already exists: a counterexample. arXiv: gr-qc/0703098.
  23. R. D. Sorkin, Causal sets: Discrete gravity, (notes for the Valdivia summer school), in Lectures on Quantum Gravity, Proceedings of the Valdivia Summer School, Valdivia, Chile, January 2002, ed. by Andrés Gomberoff and Don Marolf. (Springer, New York, 2005), p. 305-327, (arXiv:gr-qc/0309009).
  24. G. 't Hooft, Quantum gravity: a fundamental problem and some radical ideas, in Recent Development in Gravitation, Proceedings of the 1978 Cargese Summer Institute, ed. by M. Levy and S. Deser (Plenum, New York/London 1979), p. 323-345.
  25. P. Wallden, Causal Sets: Quantum gravity from a fundamentally discrete spacetime. \ J. Phys.: Conf. Ser., 222, 2010, p. 012053, (arXiv:1001.4041 [gr-qc]).

## Sequential growth dynamics of a directed acyclic dyadic graph

A.L. Krugly

**Abstract:** A model of discrete spacetime on a microscopic level is considered. It is a directed acyclic dyadic graph. The aim of the model is to describe particles as repetitive structures of the graph. Dynamics of the model is a sequential addition of new vertexes and directed edges. Growth of the graph is a Markovian process with a given random law. An example of dynamics is considered. Probabilities determined by statistical sums over paths between vertexes. A self organization of structures and physical interpretation are discussed.

# Гомотопические уравнения Маурера-Картана в физике

А. С. Лосев

*доктор физико-математических наук*

Рассмотрены два подхода к построению решений классических уравнений движения, приводящих к гомотопическому уравнению Маурера-Картана. В первом подходе полевые переменные возникают как флуктуации структурных констант алгебры функций на многообразии. Во втором уравнения возникают из условия гомотопической конформной инвариантности над инстантонным бэрграундом. Высказано предположение, что второй случай есть частный случай первого.

## 1. Введение

Современная классическая физика (классическая теория поля) построена на фундаменте дифференциальной геометрии, отражающей интуитивные представления о гладкости и непрерывности и, таким образом, идейно совпадающая с понятием физического здравого смысла.

Современная квантовая теория поля как теория нестроена, и, на мой взгляд, причиной этого является инерция физического здравого смысла, отказывающегося расставаться с привычным понятием гладкого многообразия и самозамкнутым миром дифференциальной геометрии. Непривычность и, как следствие, недостаточная проработанность квантовой физики, сопровождающаяся разрушением традиционных понятий фазового пространства и состояния как точки на нем и их заменой Дираком на абстрактный вектор в абстрактном пространстве, вызвала философское неприятие многих физиков. Смутное желание о «возвращении» гладкого пространства, точек и траекторий движения было реализовано в Фейнмановской концепции функционального интеграла, в которой все эти понятия присутствуют, однако принцип экстремального действия заменяется на гипотетический интеграл по траекториям.

Альтернативный подход, возникший после работы Белавина, Полякова и Замолодчикова [1], предполагал отказ от понятия траектории или полевой конфигурации, но сохранял классическим понятие пространства-времени. С точки зрения этого подхода функциональный интеграл есть не более чем частный случай общей теории поля, рассмотренный при таких значениях параметров, при которых возможно выделение классической конфигурации поля и малых флуктуаций вблизи нее.

После появления теории струн стало ясно, что само понятие классического пространства (снабженного классической геометрией) придется пересмотреть. В самом деле, в теории струн пространство-время как классический объект

возникает лишь при описании двумерной теории на мировом листе струны в терминах функционального интеграла, при этом уравнения движения для геометрических структур следуют из конформности двумерной квантовой теории поля. Поляков [2] предложил отказаться от предположения, что квантовая теория поля на мировом листе струны описывается в терминах функционального интеграла, и заменил его на общую двумерную теорию. При этом произошло объединение в единый новый концепт понятий пространства-времени, полей на них и решений уравнений движения: этим концептом стала двумерная конформная теория поля. Такое обобщение понятия пространства-времени стало совершенно неожиданным для математиков, трансцендентной конструкцией, к которой не вели предлагавшиеся ранее обобщения геометрии.

Первой целью данной работы является демонстрация другого принципа, также объединяющего в единой конструкции пространство-время, поля и решения уравнений движения. Эти принципом является  $A$ -бесконечность структура, а результатом его применения вблизи гладкого пространства – гомотопические уравнения Маурера-Картана.

Второй целью является обобщение поляковского принципа на случай гомотопической конформной теории, при этом, в частности, открывается возможность описания аналогов уравнений Эйнштейна на случай  $Q$ -многообразий, и следовательно, схем (в смысле Гротендика). Тем самым достаточно неожиданно возникает ответ на старый вопрос Гротендика «что такое метр?», если считать, что «метр» – это метрика на пространстве-времени (предположительно, удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна). С моей точки зрения ответить на вопрос Гротендика – это объяснить, что является аналогом метрики и уравнений Эйнштейна на схемах. Во второй части статьи показано, что если схемы заменить на эквивалентные им  $Q$ -многообразия, то можно определить геометрические данные на них, обобщающие понятие метрики, а также написать для

них уравнения, гипотетически являющиеся гомотопическими уравнениями Маурера-Картана.

## 2. Тау-теория

### 2.1. Проблемы классических полевых конфигураций

Основным понятием классической физики является классический бэкграунд (классическая полевая конфигурация). В подходе принципа наименьшего действия для ее определения необходимо задать три типа данных:

1. Гладкое многообразие.
2. Набор полей на этом многообразии (под полями понимается геометрическая структура, локально задаваемая набором функций, например, метрика, связность в каком-нибудь расслоении, сечение какого-нибудь расслоения, отображение этого многообразия в другое многообразие).
3. Уравнения движения, обычно понимаемые как уравнения Эйлера-Лагранжа для действия, являющегося интегралом от локальной функции полей (называемой лагранжианом) по этому многообразию.

При выборе лагранжиана обычно ограничиваются выражениями, содержащими конечное число производных, однако, уже лагранжианы, описывающие эффективное действие в теории струны в виде разложения по обратному натяжению струны, содержат сколь угодно большое число производных.

В таком подходе совершенно не понятно, как описать классическую полевую конфигурацию на многообразии с особенностями, а именно – какие особенности допустимы, как следует определить поля на таких многообразиях, какие действия допустимы и т.д.

Не вполне ясно, насколько возможно перейти от гладких многообразий (являющихся спектрами коммутативных алгебр) к некоммутативным многообразиям (ассоциированным с некоммутативными ассоциативными алгебрами).

Сторонники теории струн считают, что ответ на все эти вопросы может быть дан только в рамках этой теории, конструкции которой расширяют мир гладких классических полевых конфигураций, но при этом теория струн как самозамкнутая теория не сформулирована (существует в виде набора самосогласованных правил действий). Более того, теория струн, по-видимому, может быть согласована только внутри М-теории, структура которой еще более загадочна – несмотря на большое число фактов, указывающих на то, что такая теория существует.

### 2.2. Единая концепция

Оказывается, три этапа построения классической полевой конфигурации можно объединить в один, если

считать, что пространство-время является не исходным данным, а решением некоторых уравнений. При этом поля становятся флуктуациями фундаментальных переменных вблизи решения, отвечающего пустому пространству-времени, а уравнения движения на эти поля не постулируются отдельно, а являются следствием упомянутых выше уравнений.

Здесь представляется уместной следующая аналогия – предположим, мы хотим описать движение волн на поверхности озера. Важно, что и само озеро, и волны на нем состоят из одной сущности – воды – и описываются едиными уравнениями. Разделение воды на водную гладь и волны – вопрос удобства описания, связанного с тем, что размер волн сильно меньше размера озера.

Так как пространство должно возникать как решение системы уравнений, фундаментальные переменные не могут быть геометрическими – они вынуждены быть алгебраическими. В качестве таких переменных предлагается пространство полилинейных отображений векторных пространств (которые могут быть бесконечномерными)

$$m : \bigoplus V^{\otimes n} \rightarrow V \quad (1)$$

В качестве основного уравнения предлагается уравнение А-бесконечность структуры, записанное с помощью скобки Герштенхабера (которую мы будем обозначать как  $G$ ) в виде

$$G(m, m) = 0 \quad (2)$$

При этом мы будем отождествлять изоморфные А-бесконечность структуры.

Обычному пространству соответствует решение уравнения (2), описывающее коммутативное ассоциативное умножение. Нас будут интересовать решения, описывающие суперкоммутативные ассоциативные умножения.

Решения линеаризованных уравнения (2) над суперкоммутативным умножением (профакторизованные по изоморфизмам) – это просто когомологии Хохшильда [4], ассоциированные с суперкоммутативным пространством. Если суперкоммутативное пространство не имеет особенностей, то они являются поливекторными полями  $P$  на этом пространстве.

Так появляются поля классической теории поля.

На квадратичном уровне уравнение (2) приводит к квадратичному уравнению на поля, имеющему вид

$$S(P, P) = 0 \quad (3)$$

где  $S$  – скобка Схоутена.

Отметим, что если  $P$  – нечетное векторное поле, которое мы будем обозначать  $Q$ , то уравнение (3) означает, что мы имеем дело с так называемым  $Q$ -многообразием – супермногообразием, снабженным нечетным векторным полем, в квадрате равным нулю.

Предположим теперь, что исходное уравнение (2) в качестве стартового решения имеет суперком-

мутативную алгебру, тензорно умноженную на матричную алгебру.

Тогда элемент когомологий Хохшильда можно выбрать в виде

$$P = Q + A \quad (4)$$

где  $Q$  является нечетным векторным полем на супермногообразии (действующим как 1 на матричной алгебре), а  $A$  – нечетная функция на супермногообразии, принимающая значения в дифференцированиях матричной алгебры. При этом квадратичные уравнения примут вид

$$Q(A) + [A, A] = 0, \quad (5)$$

то есть будут иметь вид уравнений Маурера-Картана.

Встает вопрос – какие уравнения движения в математической физике можно представить в виде (5)?

### 2.3. Пример 1: Теория Черна-Саймонса

В этом случае в качестве суперкоммутативного пространства следует рассмотреть касательное расслоение к трехмерному многообразию с обращенной четностью слоев. Дифференциальные формы являются функциями на таком многообразии, а внешний дифференциал – нечетным векторным полем, в квадрате равным нулю [5]. Если в качестве  $A$  выбрать 1-форму со значениями в дифференцировании матричной алгебры, то ее можно интерпретировать как форму связности в тривиальном расслоении – и уравнение (5) принимает вид

$$dA + [A, A] = 0 \quad (6)$$

то есть является условием зануления кривизны этой связности, что является уравнением движения в теории Черна-Саймонса.

Однако теория Черна-Саймонса не содержит распространяющихся волн и поэтому зачастую рассматривается как «нефизическая», то есть качественно непохожая на теории, встречающиеся в реальном мире.

Чтобы привести пример физической теории, то есть теории близкой по свойствам к теориям, встречающимся в реальном мире, придется рассмотреть более сложный пример.

### 2.4. Пример 2: суперсимметричная теория Янга-Миллса

В качестве супермногообразия рассмотрим произведение трех пространств: 10-мерного вещественного пространства, пространства чистых левых спиноров для группы  $SO(10)$  и пространства левых спиноров обращенной четности. Дадим необходимые пояснения.

Пространство спиноров – это 32-мерное пространство (внешняя алгебра 5-мерного пространства). На нем действуют так называемые гамма-матрицы:

операторы внешнего умножения на элемент 5-мерного пространства (так называемые гамма-матрицы рождения) и повышающие степень элемента на 1, и операторы нечетного дифференцирования или же контракции с элементами двойственного пространства (гамма-матрицы уничтожения) – они понижают степень на 1. Таким образом, возникают 10 операторов  $\gamma_a$  (на физическом языке – 10 гамма-матриц). Коммутаторы этих операторов являются операторами Лоренца – они образуют алгебру  $SO(10)$ . Операторы Лоренца либо не меняют степень элемента внешней алгебры, либо увеличивают или уменьшают ее на 2, поэтому внешняя алгебра разбивается на два неприводимых 16-мерных представления – четные элементы (называемые левыми спинорами, которые мы будем обозначать греческими буквами  $\lambda$ ) и нечетные (называемые правыми спинорами). Левый спинор называется чистым, если он поворотом из группы Лоренца может быть приведен к элементу нулевой степени. Пространство чистых спиноров является 11-мерным алгебраическим многообразием, однако оно не является полным пересечением – глобально оно задается 10 уравнениями, из которых лишь 5 являются алгебраически независимыми. Для описания этих уравнений рассмотрим спаривание (\*,\*) между левыми и правыми спинорами, инвариантное относительно группы Лоренца, тогда 10 уравнений чистоты спиноров имеют вид квадрат

$$(\lambda, \gamma_a \lambda) = 0 \quad (7)$$

Нечетные координаты на пространстве левых спиноров обращенной четности мы будем обозначать  $\theta_a$ .

Дифференциал имеет вид

$$Q = d_1 + d_2, \quad (8)$$

где

$$d_1 = \sum \lambda_a \frac{\partial}{\partial \theta_a}, \quad (9)$$

а

$$d_2 = \sum (\lambda, \gamma_a \theta) \frac{\partial}{\partial X_a} \quad (10)$$

Здесь  $X_a$  – координаты на десятимерном пространстве (пространстве-времени).

Когомологии первого дифференциала являются полями суперсимметричной теории Янга-Миллса в формализме Баталина-Вилковисского, то есть состоят из духов Фаддеева-Попова, калибровочных полей, глюино (спинорных полей со значениями в присоединенном представлении калибровочной группы) и антиполей ко всем этим полям.

Действие второго дифференциала при ограничении на когомологии дает абелеву часть калибровочных преобразований, и оператор Дирака на глюонных полях.

Хорошо известно, что индуцирование операции на когомологии не сводится всего лишь к ограничению –

требуется добавить высшие операции (это явление хорошо известно в спектральной последовательности бикомплекса – для вычисления когомологий тотального комплекса требуется учесть высшие дифференциалы). Такой высший дифференциал отличен от нуля при действии на связности – численно он равен оператору Максвелла.

Как показано в [6], учет коммутаторного члена в уравнении (6) приводит к взаимодействию глюонного поля с калибровочным, делает калибровочные преобразования неабелевыми, а также продолжает оператор Максвелла до уравнения движения теории суперсимметричной теории Янга-Миллса.

## 2.5. Обсуждение

Я называю приведенную выше конструкцию объединения пространства-времени, полей и уравнений движения тау-теорией вследствие аббревиатуры Tensor Algebra Universe (TAU), поскольку в ней и пространство и поля строятся из полилинейных операций на векторном пространстве, которые являются элементами тензорной алгебры.

Уравнения движения в тау-теории – это гомотопические уравнения Маурера-Картана, которые получаются из обычных уравнений при ограничении на когомологии относительно некоторого дифференциала, и они имеют вид

$$m_1(A) + m_2(A, A) + m_3(A, A, A) + \dots = 0 \quad (11)$$

Здесь  $A$  - поля на некотором пространстве, а  $m_i$  -  $i$ -арные полилинейные операции, образующие  $L$ -бесконечность структуру [7], то есть первая операция является дифференциалом, вторая операция по отношению к первой удовлетворяет правилу Лейбница, вторая операция удовлетворяет тождеству Якоби с точностью до коммутатора дифференциала с третьей операцией и т.д.

В следующей части мы приведем аргументы в пользу того, что условия гомотопической конформной инвариантности двумерной теории поля также имеют вид гомотопического уравнения Маурера-Картана.

## 3. Струнная гравитация на $Q$ -многообразиях

### 3.1. Дифференциальная или алгебраическая геометрия?

При появлении геометрии общих пространств в 19 веке можно проследить два принципиально разных подхода к тому, что называть многообразием. Согласно первому, дифференциально-геометрическому подходу, многообразие – это то, что локально изоморфно шару в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Согласно второму, алгебраическому подходу, многообразие – это то, что можно получить из стандартного пространства (например,

многомерного вещественного или комплексного пространства), наложив некоторые уравнения и профакторизовав по некоторым симметриям. Если сами уравнения являются алгебраическими, мы оказываемся в области собственно алгебраической геометрии, но алгебраический подход ей не ограничивается.

Характерной особенностью алгебраического подхода (который, насколько мне известно, исповедует Гротендик) является отказ от требования регулярности – окрестности точек могут не быть изоморфны шарам. Пространство (в простейшем случае аффинной схемы) заменяется на коммутативное ассоциативное кольцо функций на нем. Более того, развитие алгебраического подхода привело к идее, что само кольцо функций следует рассматривать скорее как кольцо когомологий некоторой дифференциально-градуированной алгебры.

Рассмотрим следующий пример – пусть мы хотим понимать пространство как множество нулей системы из  $K$  уравнений

$$F_a(X) = 0 \quad (12)$$

на пространстве  $\mathbb{C}^N$  с координатами  $X_1 \dots X_N$ .

Рассмотрим суперпространство  $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}[1]^K$ , на котором кольцом функций является симметрическая алгебра от  $N$  коммутирующих переменных  $X_i$ , тензорно умноженная на внешнюю алгебру от  $K$  нечетных переменных  $\theta_a$ .

Снабдим эту алгебру дифференциалом  $Q$  (дифференциалом Кошуля)

$$Q = \sum F_a(X) \frac{\partial}{\partial \theta_a}, \quad (13)$$

получая при этом дифференциально-градуированную алгебру.

Кольцо когомологий оператора  $Q$  следует считать правильным аналогом кольца функций на нулях пространства решений системы уравнений.

### 3.2. Физика на основе дифференциальной геометрии и поляковский подход

Дальнейшее развитие дифференциально-геометрического подхода позволило определить тензорные поля на гладких многообразиях. Эти поля использовались при построении действий в теоретических моделях классической физики. В ряде случаев – для гравитации и электромагнетизма – были построены теории, получившие практическое подтверждение как классические теории поля.

Успех дифференциально-геометрического подхода к понятию пространства привел к тому, что именно этот подход был абсолютизирован и взят за основу при построении других теоретических моделей, включая теорию струн. Последняя рассматривается как пространство отображений двумерной поверхности с римановой метрикой в многообразии, снабженное

римановой метрикой, антисимметричным тензором и скалярным полем.

Такая теория называется сигма-моделью и уравнение движения на поля согласно Полякову следует из ее конформной инвариантности на квантовом уровне (понимаемое в смысле функционального интеграла по пространству отображений).

Полякову же принадлежит и существенно более глубокое обобщение этой идеи. Оно основано на том, что функциональный интеграл плохо определен на пространствах, сильно отличающихся от плоского. Поэтому, согласно Полякову, следует отказаться от построения теории струн через последовательность: пространство-время, поля, условие конформности (которая копирует последовательность классического подхода к классической физике-пространство, поля, экстремум действия) и считать решениями классической теории поля сразу конформные теории. Поляков с соавторами построили систему аксиом двумерных конформных теорий, и решения этой системы аксиом и есть решения классической теории в общем положении.

При этом в случае общего положения никакого пространства-времени нет, оно возникает только в пределе в следующем смысле. Рассмотрим пространство конформных теорий, зависящее от параметра. Пусть при стремлении этого параметра к критическому значению у группы локальных наблюдаемых конформная размерность стремится к нулю. При этом, как можно показать, операторное разложение этих наблюдаемых (которое при общем значении параметров зависело от расстояния между наблюдаемыми) стремится к структурным константам коммутативной ассоциативной алгебры, то есть задает многообразие в смысле алгебраического подхода.

Если возникающее пространство-время гладкое, то асимптотики конформных размерностей при стремлении параметра к критическому значению рассматриваются как собственные значения оператора Лапласа на пространстве-времени. В негладком случае будет возникать некоторое обобщение уравнений Эйнштейна, которое в настоящий момент не изучено (в настоящее время не имеется достаточного количества явных примеров конформных теорий, стремящихся к негладким многообразиям). Но такая возможность подразумевается – поэтому подход Полякова не исключает существование обобщений решений уравнений Эйнштейна на особых многообразиях.

### 3.3 Гомотопически-конформные теории и уравнения Эйнштейна на Q-многообразиях

Эвристически, гомотопический подход состоит в замене сложных объектов на когомологии некоторого дифференциала, действующего на более простых объектах.

Как мы сейчас увидим, этот подход применим также и к понятию конформной теории. А именно, следуя Виттену, мы скажем, что двумерная теория поля является гомотопически конформной, если она,

во-первых, содержит сохраняющийся ток  $J$ , так что квадрат отвечающего этому току заряда  $Q$  равен нулю и во-вторых, след тензора энергии-импульса является  $Q$ -точным.

Теперь мы можем обобщить гипотезу Полякова, сказав, что пространства с решениями уравнений движения – это гомотопически конформные теории.

Поскольку пространство гомотопически конформных теорий еще менее обозримо, чем пространство конформных теорий, исследовать гипотезу в общем виде представляется бессмысленным. Тем не менее эта гипотеза становится конструктивной, если ее рассмотреть вблизи точки на пространстве параметров конформных теорий, в которой теория является набором киральных и антикиральных полей размерности 0, то есть в инстантонном пределе[8]. Тем самым целевое пространство состоит из пары комплексных супермногообразий, которые мы в дальнейшем будем называть левым и правым супермногообразиями.

Поля размерности 1 в теории киральных полей состоят из голоморфных векторных полей  $L_V$  и голоморфных 1-форм на левом многообразии(см, например [9]). Эти поля образуют супералгебру Ли  $L$ , получаемую расширением алгебры Ли векторных полей 1-формами, являющимися ее представлением.

Соответствующие супералгебры для антикиральных полей мы обозначим  $R_V$  и  $R$ . Выбирая нечетные векторные поля (в квадрате равные нулю)  $Q_L \in L_V$ ,  $Q_R \in R_V$ , мы снабдим левое и правое супермногообразия структурой  $Q$ -многообразий.

Деформации конформной теории задаются так называемыми маргинальными полями, у которых как левая, так и правая размерность равна 1. Ограничимся деформациями, сохраняющими структуру  $Q$ -многообразий.

Тогда такие деформации  $D \in L \otimes R$  должны быть замкнуты относительно дифференциалов  $Q_L$  и  $Q_R$  соответственно, и, следовательно, замкнуты относительно тотального дифференциала  $Q$ :

$$Q = Q_L + Q_R \quad (14)$$

Как известно, не все маргинальные поля отвечают деформациям конформной теории. Препятствие к этому состоит в том, что корреляторы полей могут иметь особенность  $|z|^{-2}$ , где  $z$  – расстояние между точками вставки полей на риманову поверхность. При интегрировании по положению полей в области малых  $z$  возникает логарифмическая расходимость, которая приводит к нарушению конформности.

На пространстве  $D$  можно определить двойную скобку  $[[, ]]$ :

$$[[l_1 \otimes r_1, l_2 \otimes r_2]] = [l_1, l_2] \otimes [r_1, r_2] \quad (15)$$

Оказывается, что коэффициент при логарифмической расходимости равен значению двойной скобки на  $D$  [9]. Если этот коэффициент  $Q$ -точный,

то он нарушает конформную инвариантность, но сохраняет гомотопическую конформную инвариантность.

Все вышесказанное позволяет предположить, что уравнения движения на  $Q$ -многообразиях на уровне линейных и квадратичных по  $D$  членов имеют вид

$$Q(D) + [[D, D]] = 0 \quad (16)$$

При деформации теории в порядке выше квадратичного следует ожидать возникновение конформной аномалии из конфигураций, в которых 3 или более точек подходят друг к другу. Вычисление этих членов будет проведено в последующих работах. Но все вышеизложенное позволяет сформулировать гипотезу, что на  $Q$ -многообразиях аналоги уравнений Эйнштейна имеют вид

$$Q(D) + [[D, D]] + m_3(D, D, D) + \dots = 0 \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет ту же структуру, что и гомотопическое уравнение Маурера-Картана (11), поэтому мы выскажем еще одну гипотезу о том, что (17) на самом деле является гомотопическим уравнением Маурера-Картана.

## Заключение

Мы рассмотрели два новых подхода к построению решений уравнений движения в теориях, связанных с гравитацией. В каждом из них уравнение движения имеет форму гомотопического уравнения Маурера-Картана. Можно предположить, что подход гомотопической конформной инвариантности является частным случаем тау-теории.

## Литература

1. A.M.Polyakov, A.A.Belavin, A.B.Zamolodchikov, Infinite Conformal Symmetry of Critical Fluctuations in Two-dimensions, *J.Statist.Phys.*34:763, 1984.
2. А.М. Поляков Калибровочные поля и струны, [Пер. с англ.] Ижевск: Удмурт. ун-т, 1999 314 с. (Библиотека "Регулярная и хаотическая динамика").
3. M.Markl, S.Shnider, J.Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics, Math.Surveys and Monographs*,96, AMS, 2002.
4. Gerhard Hochschild, Bertram Kostant, Alexander Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras, Transactions AMS* 102 (1962), No.3, 383–408.
5. M.Alexandrov, M.Kontsevich, A.Schwarz and O.Zaboronsky, *The Geometry of the Master Equation and Topological Quantum Field Theory, Int.J.Mod.Phys. A12* (1997), 1405.
6. E.Witten, *Twistor-like transform in Ten Dimensions, Nucl.Phys.B*266 (1986), 245.
7. T. Lada, M. Markl, *Strongly homotopy Lie algebras, Communication in Algebra, vol.23, issue 6*(1995).
8. E.Frenkel, A.Losev, N.Nekrasov, *Notes on instantons in topological field theory and beyond, Nucl.Phys.Proc.Suppl.* 171: 215, 2007.
9. Andrei S. Losev, Andrei Marshakov, Anton M. Zeitlin, *On First Order Formalism in String Theory, Phys.Lett.B*633:375-381, 2006.

## Homotopy Maurer-Cartan equation in physics

A.S. Losev

**Abstract.** We consider two approaches for construction of solutions of classical equations of motion that lead to Homotopy Maurer-Cartan equations. In the first approach field variables appear as fluctuations of structure constants of algebra of functions on the manifold. In the second approach equations arise the condition of homotopy conformal invariance near the instantonic background. It is conjectured that the second case is a particular case of the first.

# Метод высоко реалистичной совмещенной визуализации 3D сцен в реальном времени

А.В. Мальцев<sup>1</sup>, М.В. Михайлюк<sup>2</sup>

*1 – кандидат физико-математических наук, 2 – доктор физико-математических наук,*

В статье предлагается метод совмещенной визуализации трехмерных виртуальных сцен в реальном времени, основанный на комбинированном использовании шейдерной обработки и трассировки лучей. Метод обеспечивает эффективное соотношение между реалистичностью синтезируемого изображения трехмерной сцены и временем генерации кадра, являющимся одним из основополагающих факторов в таких графических приложениях, как системы визуализации для тренажерных комплексов и системы виртуального окружения.

## Введение

Высоко реалистичная визуализация трехмерных виртуальных сцен требуется для решения целого ряда задач. Одной из них является реализация систем виртуальной реальности. Высокая реалистичность в данном случае позволяет приблизить виртуальный мир к реальному, сделать их визуально похожими. Еще одной областью, в которой необходим такой тип визуализации, являются имитационно-тренажерные комплексы управления сложными динамическими системами. Эти комплексы позволяют осуществлять подготовку специалистов для работы с разного рода техническими средствами, вырабатывать у обучаемого устойчивые навыки управления данной техникой. Примером такого комплекса может служить тренажер по стыковке космических кораблей. В нем на информационные экраны вместо реальных изображений с видеокамер, установленных на космическом корабле, выводится то, что попадает в поле зрения виртуальных камер в трехмерной сцене стыковки, размещенных в соответствующих положениях на модели космического аппарата. Для выработки правильных навыков в таком случае важную роль играет реалистичность синтезируемых изображений, их соответствие реальным видам. Рендеринг изображений высокой реалистичности также может использоваться в системах моделирования, виртуальных руководствах, виртуальных лабораториях и т.п.

Во всех приведенных примерах важным фактором также является скорость визуализации. Поскольку динамика виртуальных объектов должна отображаться плавно, без рывков, как это происходит в действительности, то визуализацию желательно производить в режиме реального времени, то есть время рендеринга каждого кадра не должно превышать 40 мс.

Большинство известных алгоритмов высоко реалистичной визуализации трехмерных сцен имеют существенные ограничения, которые выражаются в низкой скорости выполнения или требовании статичности объектов, в случае рендеринга сцен с большим количеством полигонов (порядка  $10^6$ ). Оба этих ограничения являются критичными в описанном классе задач (системы визуализации для имитационно-

тренажерных комплексов, системы виртуальной реальности и т.п.), где требуются как высокое качество и реалистичность изображения, так и режим реального времени визуализации динамических сцен.

В данной статье предлагается метод визуализации, обеспечивающий эффективное соотношение между качеством синтезируемого изображения трехмерной сцены и временем генерации кадра. При этом сохраняется возможность визуализации высоко полигональных динамических виртуальных сцен в режиме реального времени. Также будут рассмотрены некоторые особенности визуализации с помощью шейдерной обработки и трассировки лучей на графическом процессоре.

## 1. Совмещенная визуализация трехмерных сцен

### 1.1. Группы объектов

Предлагаемый метод «совмещенной визуализации» состоит в комбинированном использовании шейдерной обработки (с реалистичным качеством получаемого изображения) и трассировки лучей (с высоко реалистичным качеством синтезируемой картинки) на графическом процессоре. Метод основывается на том, что, как правило, не все объекты виртуальной сцены требуют полноценного высоко реалистичного качества отображения, а следовательно, целесообразно было бы сократить на них вычислительные затраты путем отображения с помощью шейдерной обработки, выполняющейся на порядок быстрее трассировки лучей. Так, например, в тренажерных системах, моделирующих стыковку космических кораблей, основное внимание наблюдателя направлено на стыковочный узел. Поэтому он должен быть визуализирован с особым качеством и детализацией. Окружение же стыковочного узла не столь важно (оно необходимо только для правильной ориентации в пространстве) и вполне достаточно отобразить его без использования высоко реалистичных методов.

Таким образом, все объекты трехмерной сцены целесообразно разделять на две группы по типам визуализации:

- объекты для отображения трассировкой лучей;
- объекты для отображения с помощью шейдеров.

Для определения групп, к которым следует отнести объекты, необходимо ввести *критерий разделения*. При этом необходимо понимать, что главной задачей каждого из них является уменьшение общих вычислительных затрат при совмещенной визуализации виртуальной сцены с целью обеспечения возможности визуализации сложных сцен с сотнями тысяч и миллионами полигонов в реальном времени без существенных потерь качества изображения. Можно определить три критерия разделения объектов сцены на группы визуализации, каждый из которых обладает своими достоинствами:

- 1) по расстоянию от наблюдателя;
- 2) по важности объектов;
- 3) смешанный критерий.

Критерий разделения *по расстоянию* основан на том, что внимание наблюдателя в большей степени сосредоточено на близких объектах. В связи с этим, такие объекты должны выглядеть реалистично и иметь высокую детализацию. И, в то же время, нет большого смысла делать высоко реалистичную визуализацию

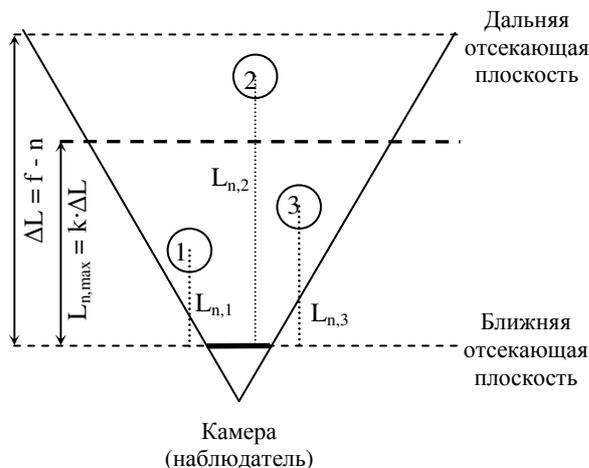


Рис. 1. Критерий разделения объектов по расстоянию.

далеких и, следовательно, плохо видимых объектов, поскольку ее результат будет мало отличен от результата шейдерной обработки, выполняемой с гораздо меньшими вычислительными затратами.

Рисунок 1 иллюстрирует применение критерия разделения по расстоянию  $L_n$  от центра объекта до ближней отсекающей плоскости виртуальной камеры. Максимальное расстояние  $L_{n,max}$ , при котором объект еще попадает в группу визуализации методом трассировки лучей, в данном случае выбирается как

$$L_{n,max} = k \cdot \Delta L = k \cdot (f - n),$$

где  $k$  – вещественный коэффициент от 0 до 1,  $n$  и  $f$  – расстояния соответственно от ближней и дальней отсекающих плоскостей до точки расположения камеры. Таким образом, представленные на рис. 1

объекты 1 и 3 будут визуализированы трассировкой лучей, поскольку  $L_{n,1}, L_{n,3} < L_{n,max}$ , а объект 2 – с помощью шейдерной обработки ( $L_{n,2} > L_{n,max}$ ).

Критерий разделения *по важности* подразумевает наличие в виртуальной сцене объектов, которые требуется визуализировать с высоко реалистичным качеством вне зависимости от расстояния между ними и наблюдателем. Кроме того, возможно, что не все объекты, находящиеся в непосредственной близости от наблюдателя, представляют для него интерес. Тогда критерий по расстоянию будет работать неэффективно, поскольку на таких объектах можно сэкономить вычислительные ресурсы, требующиеся для визуализации важных для наблюдателя объектов.

И, наконец, *смешанный критерий* разделения представляет собой объединение двух предыдущих критериев. Иными словами, в группу для высоко реалистичной визуализации попадают только те из важных для наблюдателя объектов, которые удовлетворяют критерию разделения по расстоянию. Применение смешанного критерия целесообразно для сцен, где важные объекты могут изменять свое положение с течением времени. Действительно, если один из таких объектов удаляется от наблюдателя на значительное расстояние, то отдельные его детали становятся плохо различимыми, и не имеет смысла визуализировать его в высоко реалистичном качестве.

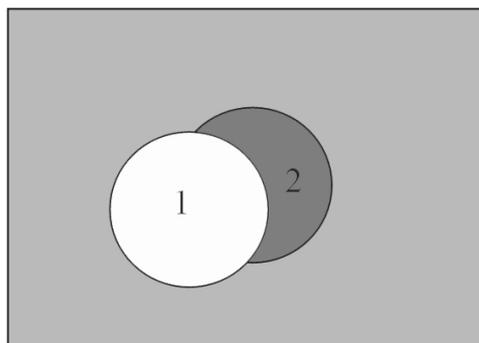
После того, как объекты разбиты по группам, необходимо выполнить визуализацию каждой из групп в собственный буфер кадра выбранным для нее методом, произвести слияние полученных буферов и вывести результирующее изображение на экран в качестве текущего кадра. Одна из основных проблем, в данном случае, заключается в том, каким образом осуществить процесс слияния двух цветных буферов в один кадр, поскольку для этого нужно знать информацию о глубине каждого пиксела обоих буферов. Далее рассмотрим метод совмещенной визуализации, основанный на применении цветных карт [1], т.е. изображений трехмерной сцены, видимых виртуальной камерой, в которых каждый полигон закрашен своим уникальным цветом, позволяющим однозначно отличить этот полигон от остальных. Данный метод позволяет выполнить слияние буферов без ресурсозатратного теста глубины пикселей.

## 1.2. Визуализация групп и синтез кадра

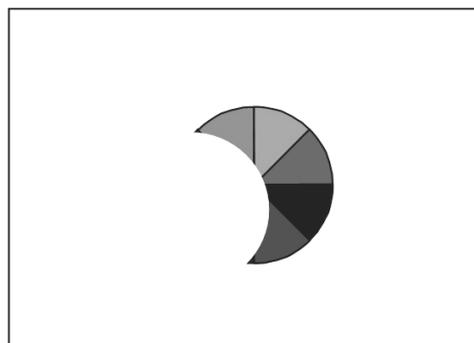
Рассмотрим методику совмещенной визуализации с использованием цветных карт. Поскольку, как было описано ранее, мы имеем две группы объектов с разным типом визуализации и результирующая картинка для каждой группы будет находиться в своем буфере, для получения готового кадра необходимо осуществить правильное наложение (с учетом глубины) изображений этих двух буферов. Для решения этой задачи предлагается следующая технология:

- 1) Визуализировать в первый буфер группу объектов, требующую шейдерной обработки.
- 2) Построить цветовую карту, содержащую все объекты сцены, попадающие в поле зрения

камеры, вне зависимости от их принадлежности к группам визуализации. При этом полигоны объектов, относящихся к группе с трассировкой



а)



б)

Рис. 2. а) Изображение 3D сцены, видимое камерой; б) цветовая карта

лучей, необходимо закрашивать в уникальные цвета, кодирующие номера этих полигонов, а полигоны остальных объектов – фоновым цветом 0хFFFFFF, говорящим об отсутствии какого-либо объекта в данной части кадра. На рисунке 2а приведен пример, в котором объект из группы шейдерной визуализации (с пометкой "1") частично перекрывает собой для наблюдателя объект из группы трассировки лучей (с пометкой "2"). Цветовая карта для данного случая представлена на рисунке 2б.

- 3) Визуализировать во второй буфер группу, требующую высоко реалистичного качества, путем трассировки лучей с использованием подготовленной на предыдущем шаге цветовой карты (подробно об этом можно прочитать в [1]).
- 4) Произвести наложение содержимого второго буфера на содержимое первого с получением готового для вывода на экран кадра.

При выполнении шага 4 необходимо учесть, что порядок наложения не может быть изменен на обратный. Это связано с тем, что результирующий буфер 2 содержит изображения только видимых частей объектов, тогда как буфер 1 может включать также объекты или части объектов, перекрываемые изображением из буфера 2.

Описанная технология обеспечивает правильность наложения изображений двух буферов без дополнительных проверок пикселей по глубине. Для того, чтобы доказать корректность предложенной технологии, необходимо убедиться, что с ее помощью получается то же изображение, что и при обычной визуализации. Рассмотрим произвольное изображение, полученное при обычной визуализации, и разобьем множество его пикселей на три группы. Группа  $G_1$  будет содержать пиксели, относящиеся к объектам виртуальной сцены, которые требуют шейдерной обработки, группа  $G_2$  – пиксели для объектов с трассировкой лучей и группа  $G_3$  – пиксели фона сцены. Докажем следующее утверждение.

**Утверждение.** Совмещенная визуализация виртуальной сцены с помощью технологии цветowych карт сохраняет множества пикселей  $G_i$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный пиксел  $\Pi$  исходного изображения. Если  $\Pi \in G_1$  (т.е. требует шейдерной обработки), то он будет виден в буфере  $B_1$ , не попадет в цветовую карту (т.к. в ней объекты с шейдерной обработкой заменяются фоном) и не попадет во второй буфер (т.к. в него попадают только объекты с трассировкой лучей). При наложении второго буфера на первый этот пиксел останется видимым, т.е. останется принадлежащим группе  $G_1$ . Если  $\Pi \in G_2$  (т.е. требует трассировки лучей), то он не попадет в первый буфер, попадет в цветовую карту и попадет во второй буфер. При наложении второй буфер имеет преимущество, поэтому пиксел (вычисленный трассировкой лучей) появится на результирующем изображении, т.е. останется принадлежащим  $G_2$ . Если  $\Pi \in G_3$  (т.е. принадлежит фону сцены), то он будет фоновым в обоих буферах и цветовой карте, поэтому и в результирующем изображении. Значит, сохранится его принадлежность множеству  $G_3$ . Утверждение доказано.

## 2. Шейдерная обработка

### 2.1. Шейдерная модель визуализации

Шейдерная модель визуализации представляет собой развитие стандартного графического конвейера (описание можно найти в [2]), в котором блоки "Преобразование и освещение" (в вершинном конвейере) и "Обработка фрагмента" (во фрагментном конвейере) заменены соответственно на вершинный и фрагментный процессоры (рис. 3). Они способны выполнять специальные программы (вершинные и фрагментные шейдеры), задающие алгоритмы обработки графических данных (в том числе, модель расчета освещенности объектов) как на уровне вершин, так и на уровне пикселей. Это придает графическому конвейеру гибкость и дает возможность реализации попиксельного расчета освещенности виртуальных объектов с применением различных моделей освещения. Таким образом, шейдерная модель ориентирована на повышение эффективности управления процессом визуализации с использованием

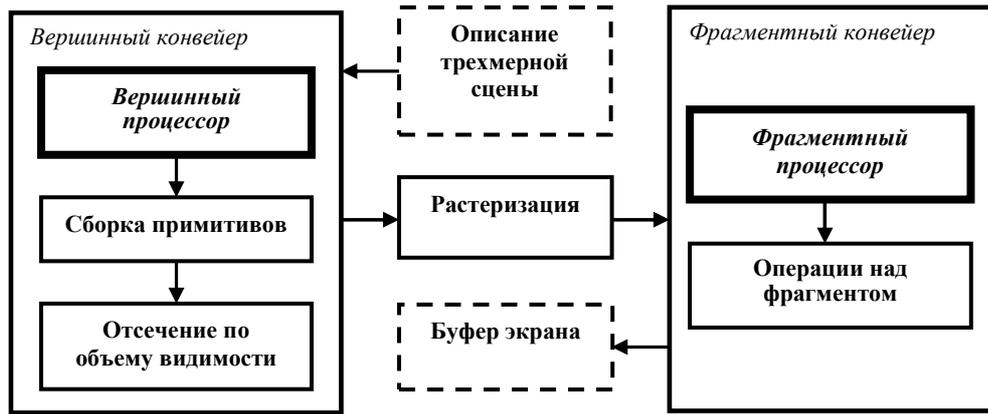


Рис. 3. Шейдерная модель визуализации.

современных методов обработки информации, а именно программируемых параллельных вычислений на GPU. При этом, с одной стороны, сохраняется возможность рендеринга в режиме реального времени, а с другой – достигается высокое качество изображения и достаточно достоверно моделируется множество окружающих нас объектов и явлений, таких как направленные источники света, отражения [3], тени [4,5] и т.д.

Обычно, шейдерная модель визуализации доступна через расширения графических библиотек. В OpenGL, например, это `GL_ARB_vertex_program` и `GL_ARB_fragment_program` для написания шейдерных программ на языке низкого уровня (подобного ассемблеру) или расширения GLSL для программирования на языке высокого уровня (подобного C). В обоих случаях на этапе загрузки шейдеры преобразуются драйвером в бинарный код для GPU. Преимуществами высокоуровневых шейдеров, конечно, являются легкость в написании и понимании текста программы, отсутствие необходимости знать набор команд, поддерживаемых GPU, наличие ряда библиотечных функций. Однако, иногда, использование языка высокого уровня может приводить к не совсем оптимальному бинарному коду. Это особенно важно в том случае, когда визуализация должна происходить в режиме реального времени. Решением в таком случае является написание шейдеров на языке низкого уровня, который дает разработчику графического приложения возможность написания оптимальных и эффективных программ.

## 2.2. Статическая оптимизация шейдеров

Одними из самых распространенных расширений графической библиотеки OpenGL для написания шейдеров на языке низкого уровня являются `ARB_vertex_program` и `ARB_fragment_program` (стандарт компании Architecture Review Board), так как они поддерживаются практически на всех типах современных видеоадаптеров. Однако, эти расширения не дают возможности реализовывать ветвления в коде программ.

Эту проблему можно решить, используя дополнительную опцию внутри вершинного и

фрагментного шейдеров, например, `NV_vertex_program2` и `NV_fragment_program2` (или более позднюю версию). Однако применение опций с префиксом `NV_` резко сужает круг видеокарт, на которых будут работать шейдерные программы (только видеоадаптеры nVidia). Кроме того, время выполнения одного стандартного оператора ветвления IF в шейдерных программах эквивалентно времени одной инструкции. А в случае, если необходимо организовать несколько ветвлений во фрагментном шейдере, то при рендеринге в каждом кадре для каждого пиксела будут выполняться несколько дополнительных инструкций, что в сумме составит уже ощутимое время. Это особенно важно, когда сцену надо визуализировать в режиме реального времени.

Другой способ решения проблемы состоит в использовании нескольких вершинных и фрагментных программ, каждая из которых будет соответствовать тем или иным условиям. Этот способ тоже имеет существенный минус – при большом количестве условий мы получим множество файлов с шейдерными программами, которые могут мало отличаться друг от друга. При этом, внося изменения или добавления в общие части программ, нужно идентично корректировать код в каждом из имеющихся файлов.

Решением вопроса может стать применение метода статической оптимизации вершинных и фрагментных программ.

Идея предлагаемого метода статической оптимизации состоит во введении ветвлений (описание которых использует специальный метаязык) в шейдерную программу и их обработке, исходя из известных условий, на этапе, предшествующем загрузке и подключению этой программы. Реализацией метода является подпрограмма- или функция-оптимизатор, которая получает в качестве входных параметров шейдерную программу, содержащую ветвления, и некоторый набор флагов, определяющий, по каким из ветвей в программе должен осуществляться переход. Флаг представляет собой строковую константу и соответствует одному известному условию. Так, использование bump-текстур при расчете освещенности виртуальных объектов можно охарактеризовать, например, флагом "BUMPMAP". Выходом функции является

оптимизированная под заданные условия программа, не включающая в себя ветвлений (рис. 4)

При этом получается, что существует только один

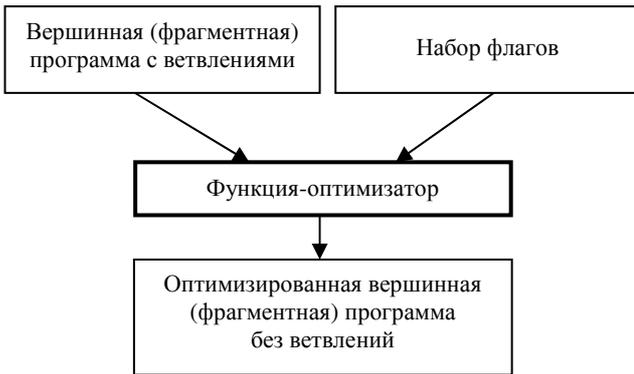


Рис. 4. Статическая оптимизация шейдеров.

файл с вершинной (фрагментной) программой, содержащей ветвления, которая автоматически преобразуется в нужное количество программ, соответствующих требуемым условиям и не содержащих ветвлений.

Блок-схеме на рисунке 4 могут соответствовать различные реализации, но мы рассмотрим только одну из них. Пусть вершинная (фрагментная) программа содержит ветвления, имеющие синтаксис:

```

@IF условие1 [условие2 [ ... [условиеN] ...]];
    # блок команд, выполняющихся при
    # соблюдении хотя бы одного из условий 1..N
    ...
[
@ELSE;
    # блок команд, выполняющихся при
    # несоблюдении всех условий 1..N
    ...
]
@ENDIF;
  
```

Здесь знак @ показывает, что строка программы содержит специальный оператор IF, ELSE или ENDIF; N – количество простых условий, а в квадратных скобках [ ] указаны необязательные элементы. Условия записываются в виде поставленных им в соответствие строчковых констант. Они могут также начинаться с оператора отрицания “!”, например, !условие1.

Запись после оператора @IF N условий подряд эквивалентна по смыслу их дизъюнкции, т.е. блок команд при @IF выполняется в случае соблюдения хотя бы одного из N условий. Запись M условий в виде структуры

```

@IF условие1;
    ...
    @IF условиеM;
        #блок команд, выполняющихся при
        # соблюдении всех условий 1..M
    ...
@ENDIF;
...
@ENDIF;
  
```

эквивалентна по смыслу конъюнкции этих условий, т.е. блок команд выполняется только в случае соблюдения всех M условий.

Так, например, если нужно предусмотреть особый алгоритм расчета освещенности для визуализации объектов с bump-текстурами или текстурами отражения (reflection map) при наличии зеркального освещения (specular lighting), можно написать:

```

@IF BUMPMAP REFLMAP;
@IF SPECULAR;
    #блок команд, для особой схемы
    # расчета освещенности
    ...
@ENDIF;
@ENDIF;
  
```

Набор флагов будем записывать в виде строки типа CString, имеющей вид:

” [флаг<sub>1</sub> [флаг<sub>2</sub> [ ... [флаг<sub>M</sub>] ...] ]”,

где в квадратных скобках [ ] указаны необязательные элементы, M – количество флагов в строке. Запись M флагов подряд эквивалентна по смыслу их конъюнкции, т.е. все условия, характеризуемые этими флагами, соблюдены. Например, набор флагов, определяющий наличие в виртуальной сцене направленных источников света типа “прожектор” (spot light) и наложение на объекты этой сцены bump-текстур и текстур отражения (reflection map), может иметь вид:

” SPOTLIGHT BUMPMAP REFLMAP ”.

Функция-оптимизатор имеет интерфейс:

```

void func (FILE* file, CString& p_str, CString& flags),
  
```

где file – указатель на файл, содержащий вершинную (фрагментную) программу, p\_str – строка, в которую будет записана оптимизированная программа (результат функции-оптимизатора) и flags – набор флагов.

Встретив во входной программе оператор @IF, функция-оптимизатор осуществляет последовательный поиск строчковых констант условий, стоящих при данном операторе, в наборе флагов. Если найдено хотя бы одно совпадение  $условие_i = флаг_j$ , все команды между операторами @IF и @ELSE считаются выполняемыми, а между @ELSE и @ENDIF – отбрасываются, иначе - наоборот.

Алгоритм функции статической оптимизации можно коротко описать так:

- 1) До тех пор, пока не найден условный оператор @IF или команда END, строки вершинной (фрагментной) программы копируются в выходную строку p\_string;
- 2) При нахождении оператора @IF осуществляется последовательный перебор стоящих при нем условий: для каждого условия ищется соответствующий ему флаг во входной строке flags. При нахождении хотя бы одного соответствия условие/флаг, рассматриваемое условие считается выполненным. При этом дальнейший поиск прекращается, специальный флаг F взводится в 1, и в p\_string добавляются все строки программы до @ELSE (если такой оператор есть, иначе – до

@ENDIF). Если среди этих строк вновь найдена строка с оператором @IF, то имеет место рекурсия и алгоритм возвращается к началу пункта 2. Если ни одного соответствия не найдено, то все строки программы до @ENDIF (@ELSE) пропускаются. Надо отметить, что наличие перед условием оператора “!” , изменяет ход алгоритма: если для такого условия найден соответствующий флаг в строке flags, то оно рассматривается как невыполненное, и наоборот.

- 3) Если найден оператор @ELSE и при этом флаг  $F = 0$ , то все строки программы до @ENDIF добавляются к  $p\_string$ , если  $F = 1$  – они игнорируются. Если среди обрабатываемых (при  $F = 0$ ) строк найдена строка с оператором @IF, то алгоритм переходит к пункту 2.
- 4) Выполняются шаги 2 и 3 пока не будут обработаны все вложенные операторы @IF, после чего осуществляется переход к шагу 1.

Приведенный алгоритм поддерживает практически любую вложенность условных операторов @IF.

### 3. Особенности трассировки лучей на графическом процессоре

Одной из наиболее развитых и перспективных технологий реализации трассировки лучей является выполнение этой трассировки на графических процессорах с поддержкой программно-аппаратной архитектуры параллельных вычислений CUDA [6], позволяющей производить вычисления и обработку информации общего назначения на GPU в режиме SIMD (*Single Instruction, Multiple Data* — одиночный поток команд, множественный поток данных). Данная архитектура подразумевает выполнение на GPU (в терминах CUDA называемого Device) множеством параллельных потоков одной программы, называемой ядром (kernel), но с различными параметрами. За каждый из потоков отвечает один из группы составляющих GPU процессоров. Максимальное количество потоков, одновременно находящихся в обработке, зависит от характеристик конкретного GPU, и в настоящее время достигает 512 для чипов NVIDIA gf110. Вызов программы-ядра осуществляется из последовательного кода, выполняемого на CPU (в терминах CUDA называемого Host).

На рисунке 5 представлен один из вариантов общей схемы визуализации виртуальной сцены на GPU с применением архитектуры CUDA, который подходит, в том числе, и для реализации трассировки лучей. На начальном этапе на стороне Host производится подготовка данных, необходимых для выбранного алгоритма визуализации, и запись их в оперативную память (ОЗУ). Далее осуществляется выделение видеопамати Device и копирование в нее данных из ОЗУ, после чего управление передается на сторону Device путем запуска выполнения Ядра 1. Каждое ядро представляет часть алгоритма визуализации и выполняется в параллельном режиме с сохранением результатов в памяти Device. При завершении Ядра 1 управление возвращается к CPU и, если необходимо,

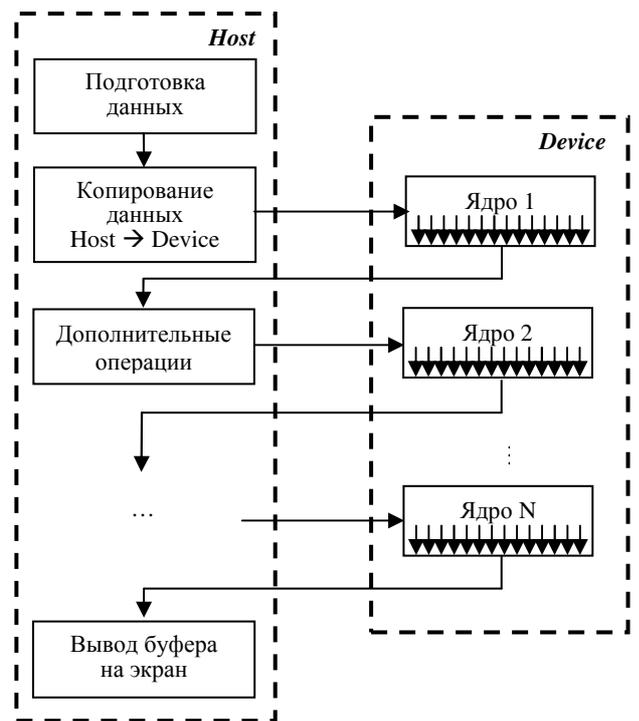


Рис. 5. Схема визуализации на GPU (CUDA).

выполняются дополнительные операции: копирование данных между видеопаматью и ОЗУ, расчеты на CPU и т.д. Затем запускается следующее ядро и т.д.

После окончания работы всех  $N$  ядер алгоритма визуализации мы должны иметь готовое изображение кадра в буфере памяти, который с помощью определенных команд стандартной графической библиотеки (OpenGL или DirectX) выводится на экран монитора.

При реализации трассировки лучей с помощью программно-аппаратной архитектуры CUDA нужно иметь в виду некоторые ее особенности:

- Количество быстрой регистровой памяти в графическом процессоре ограничено. Поэтому, если ядро использует большее число регистров, чем это возможно, эффективность его выполнения резко падает. Так, эффективность 100% достигается, когда число занимаемых ядром регистров не превышает 10. При 30-и регистрах эффективность составляет порядка 50%.
- Наличие ветвлений в ядрах также снижает их эффективность. Архитектура предусматривает выполнение потоков группами по  $N$  потоков, где  $N$  зависит от характеристик конкретного GPU (как правило,  $N = 32$ ). Если после проверки условия часть потоков группы должна выполняться по одной ветви, а остальная часть – по другой, то в результате вся группа выполняется дважды. А именно, один раз вся группа будет осуществлять проход по первой ветви с отбрасыванием результата обработки несоответствующих этой ветви потоков. Другой раз – наоборот, алгоритм будет пройден для всей группы по второй ветви с отбраковкой результата потоков, относящихся к первой. Если же ветвлений будет много и/или они будут вложенными, то это может привести к падению скорости выполнения алгоритма, а

значит, будет теряться и весь смысл параллельности в вычислениях.

Данная работа выполняется при поддержке Программы фундаментальных исследований ОНИТ РАН, проект № 2.9.

## Литература

1. А.В. Мальцев, М.В. Михайлюк. Использование цветных карт для реализации трассировки первичных лучей в трехмерных сценах // Моделирование и визуализация. Многопроцессорные системы. Инструментальные средства разработки ПО. Сборник статей под редакцией академика РАН В.Б. Бетелина – М.: НИИСИ РАН, 2009, С. 54 – 69.

2. Ф.Б. Челноков. Персональный суперкомпьютер. // Компьютерра – №13, 2006.

3. А.В. Мальцев, М.В. Михайлюк, В.Н. Решетников. Реализация карт отражения окружающей среды в реальном режиме времени // Информационные технологии и вычислительные системы – №2, 2008, С. 35 – 42.

4. А.В. Мальцев, М.В. Михайлюк. Реализация теней для всенаправленных источников света в реальном режиме времени // Программные продукты и системы – № 3, 2008, С. 35 – 38.

5. А.В. Мальцев, М.В. Михайлюк. Моделирование теней в виртуальных сценах с направленными источниками освещения // Информационные технологии и вычислительные системы – №2, 2010, С. 68 – 74.

6. А.В. Боресков, А.А. Харламов. Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК Пресс, 2010.

## Real-time high realistic combined 3D scene visualization method

A.V. Maltsev, M.V. Mikhayluk

**Abstract.** The method is proposed for real-time combined 3D scene visualization, based on simultaneous using of shader rendering and ray tracing. This method provides effective ratio between synthesized 3D scene image realism and frame generation time. The last is one of major factors in such graphic applications as visualization systems for training complexes and virtual environment systems.

# Расчет коллизий прямоугольных параллелепипедов в задачах динамики

М.В. Михайлюк<sup>1</sup>, А.М. Трушин

<sup>1</sup> – доктор физико-математических наук,

Для ускорения расчетов столкновений (коллизий) виртуальных динамических объектов в трехмерных сценах компьютерных тренажерных комплексов эти объекты аппроксимируются прямоугольными параллелепипедами (боксами). В настоящей работе предлагается алгоритм определения и обработки коллизий боксов, являющийся усовершенствованной модификацией алгоритма, основанного на теореме о разделяющей оси.

## Введение

Одной из важных подсистем компьютерных тренажерных комплексов является подсистема динамики, которая осуществляет моделирование движения и взаимодействия виртуальных трехмерных объектов между собой и с окружающей обстановкой. В частности, в ней необходимо определять и обрабатывать столкновения (коллизии) объектов. Определение коллизий объектов произвольных форм является трудной и ресурсозатратной задачей. Поэтому один из распространенных методов определения коллизий основывается на том, что каждый динамический виртуальный объект сцены окружается (аппроксимируется) прямоугольным параллелепипедом (боксом) и далее ищутся пересечения этих боксов. Тогда моделирование столкновения двух виртуальных объектов включает в себя сначала определение столкновения двух боксов (момента и точек коллизии), а затем расчет реакций тел (соответствующих рассматриваемым боксам), на эту коллизию.

Существует много подходов к определению коллизий боксов. Предлагаемый в настоящей работе алгоритм является усовершенствованной и оптимизированной реализацией алгоритма, основанного на теореме о разделяющей оси.

## 1. Постановка задачи

В настоящей модели бокс имеет следующие характеристики:

- матрица  $M$  перехода из системы координат бокса в мировую систему координат;
- размерные характеристики:  $l$  - половина длины,  $w$  - половина ширины и  $h$  - высота (см. рис. 1);
- линейная скорость  $V_B$  движения бокса  $B$ .

Расположим центр правосторонней системы координат бокса в центре его нижнего основания, оси  $x$  и  $y$  - в плоскости этого основания, а ось  $z$  направим вверх параллельно боковым ребрам (см. рис. 1).

Так как моделирование производится с некоторым временным шагом, то, в общем случае, на некотором шаге боксы еще не пересекаются, между шагами происходит столкновение, а на следующем шаге боксы

уже пересекаются. Именно на этом шаге моделирования и обнаруживается коллизия. Поэтому задача состоит в разработке алгоритма, позволяющего по исходным параметрам боксов определить, пересекаются ли боксы и, если да, то вычислить точку  $P$  первоначального контакта боксов, нормаль  $\vec{n}$  контакта в точке  $P$  и глубину  $d$  пересечения боксов вдоль нормали  $\vec{n}$ .

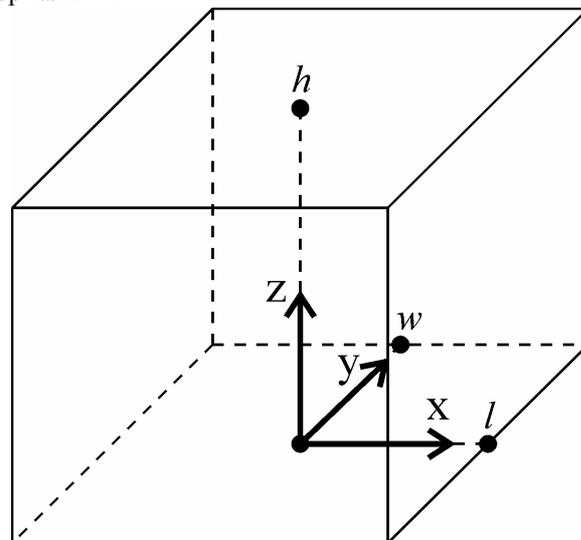


Рис. 1. Система координат бокса и его размеры

## 2. Общее описание алгоритма

Предлагаемый алгоритм включает следующие этапы:

1. Определение базисов потенциальных разделяющих плоскостей;
2. Определение коллизии двух боксов при помощи теоремы о разделяющей оси. Если факт коллизии установлен, то выполняются следующие пункты;
3. Вычисление глубины  $d$  пересечения двух боксов и нормали  $\vec{n}$  их контакта;
4. Вычисление точки  $P$  первоначального контакта двух боксов.

Перед разбором всех этих этапов приведем формулировку теоремы о разделяющей оси и рассмотрим ее частный вид для двух боксов.

### 3. Теорема о разделяющей оси

Известна следующая

**Теорема 1 (о разделяющей прямой).** Два выпуклых тела в трехмерном пространстве не пересекаются тогда и только тогда, когда существует такая прямая, что проекции этих тел на нее не пересекаются.

Очевидно, что если такая прямая существует, то можно провести перпендикулярную ей плоскость так, что оба тела будут лежать по разные стороны от этой плоскости. Такая плоскость называется *разделяющей*; соответствующую ей прямую также будем называть *разделяющей*. Если на прямой ввести направление, то мы получим *разделяющую ось*.

Рассмотрим два произвольных бокса  $B_1$  и  $B_2$ , и обозначим через  $U_1$  и  $U_2$  множества из трех направляющих векторов их ребер. Пусть  $C$  – множество попарных векторных произведений векторов из  $U_1$  и  $U_2$  (всего их будет 9), а  $U = \{U_1 \cup U_2 \cup C\}$  – объединение всех этих множеств направляющих векторов (всего их будет 15). Для трехмерных боксов существует следующий частный вид теоремы о разделяющей оси.

**Теорема 2.** Боксы  $B_1$  и  $B_2$  не пересекаются тогда и только тогда, когда найдется хотя бы один вектор  $\vec{w} \in V$  такой, что проекции боксов на ось с этим направляющим вектором не пересекаются (см. рис. 2).

Разделяющую плоскость, соответствующую разделяющей оси с вектором  $\vec{w}$ , будем обозначать через  $G$ . Таким образом, прямые с направляющими векторами из  $U$  (а их не более 15) являются *потенциальными разделяющими осями*, а соответствующие им плоскости – *потенциальными разделяющими плоскостями*. Если какая-либо из них окажется разделяющей, то боксы не пересекаются, в противном случае боксы пересекаются.

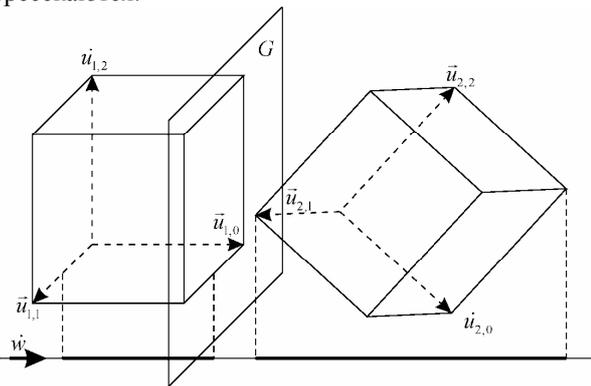


Рис. 2. Разделяющая ось  $\vec{w}$  для двух боксов

Направляющими векторами  $\vec{u}_{1,i}$  и  $\vec{u}_{2,i}$  ребер боксов  $B_1$  и  $B_2$  с матрицами  $M_1$  и  $M_2$  будут первые три столбца этих матриц:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{1,i} &= (M_1[0][i], M_1[1][i], M_1[2][i]) \\ \vec{u}_{2,i} &= (M_2[0][i], M_2[1][i], M_2[2][i]) \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Зная  $U_1$  и  $U_2$  можно вычислить и множество  $U = \{U_1 \cup U_2 \cup C\}$ .

### 4. Базисы потенциальных разделяющих плоскостей

Потенциальная разделяющая плоскость перпендикулярна соответствующей прямой, определяемой вектором  $\vec{u} \in U$ , поэтому ее базис также будет перпендикулярен  $\vec{u}$ . Упорядочим векторы в множестве  $U$ , превратив его в массив

$$U = \{\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{2,0}, \vec{u}_{2,1}, \vec{u}_{2,2}, [\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{2,0}], [\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{2,1}], [\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{2,2}], [\vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,0}], [\vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,1}], [\vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,2}], [\vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{2,0}], [\vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{2,1}], [\vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{2,2}]\}$$

Соответствующие им базисные векторы потенциальных разделяющих плоскостей будем помещать в массивы  $W_0$  и  $W_1$ .

Если  $\vec{u} = \vec{u}_{i,j}$  (т.е. является ребром  $i$ -го бокса), то в качестве базиса соответствующей плоскости можно выбрать два других ребра этого же бокса ( $\vec{u}_{i,j+1}$  и  $\vec{u}_{i,j+2}$ , где сумма второго индекса берется по модулю 3).

Если  $\vec{u} = [\vec{u}_{1,i}, \vec{u}_{2,j}]$ , то  $\vec{u} \perp \vec{u}_{1,i}$  и  $\vec{u}_{1,i}$  можно взять в качестве первого базисного вектора. Тогда  $[\vec{u}, \vec{u}_{1,i}]$  даст второй базисный вектор. Таким образом, получаем:

$$W_0 = \{\vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{2,1}, \vec{u}_{2,2}, \vec{u}_{2,0},$$

$$\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{1,2}\}$$

$$W_1 = \{\vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,2}, \vec{u}_{2,0}, \vec{u}_{2,1},$$

$$[[\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{2,0}], [\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{2,1}], [\vec{u}_{1,0}, \vec{u}_{2,2}], \vec{u}_{1,0}],$$

$$[[\vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,0}], [\vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,1}], [\vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,2}], \vec{u}_{1,1}],$$

$$[[\vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{2,0}], [\vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{2,1}], [\vec{u}_{1,2}, \vec{u}_{2,2}], \vec{u}_{1,2}]\}$$

Массивы  $U$ ,  $W_0$  и  $W_1$  будут задавать нормали и правые базисные пары векторов 15 потенциальных разделяющих плоскостей.

В некоторых случаях количество рассматриваемых потенциальных разделяющих плоскостей для двух боксов можно уменьшить.

**Утверждение 1.** Пусть  $\vec{u}_{1,i} \parallel \vec{u}_{2,j}$  для некоторых  $\vec{u}_{1,i} \in U_1$ ,  $\vec{u}_{2,j} \in U_2$ . Тогда все ненулевые векторные произведения  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}]$  из  $C$  будут параллельны векторам из множества  $U_1 \cup U_2$ .

**Доказательство.** Векторное произведение  $[\vec{u}_{1,i}, \vec{u}_{2,j}]$  равно нулю. Так как  $\vec{u}_{1,i} \perp \vec{u}_{1,k}$  для  $k \neq i$  и  $\vec{u}_{2,j} \perp \vec{u}_{2,s}$  для  $s \neq j$ , то векторы  $\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s} \in U_1 \cup U_2$  лежат в одной плоскости. Поэтому  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \parallel \vec{u}_{1,i} \parallel \vec{u}_{2,j}$ . Далее,  $[\vec{u}_{1,i}, \vec{u}_{2,t}] \parallel [\vec{u}_{2,j}, \vec{u}_{2,t}] = \vec{u}_{2,t} \in U_2$  для  $t \neq j$ ,  $r \neq j, r \neq t$ . Аналогично,  $[\vec{u}_{1,r}, \vec{u}_{2,j}] \parallel [\vec{u}_{1,r}, \vec{u}_{1,i}] = \vec{u}_{1,r} \in U_1$  для  $t \neq i$ ,  $r \neq t, r \neq i$ . Утверждение доказано.

Таким образом, если два бокса расположены так, что какая-либо сторона одного из них параллельна какой-либо стороне другого, то множество  $U$  направляющих векторов потенциальных разделяющих осей совпадает с множеством  $U_1 \cup U_2$  сторон обоих боксов (т.е. вместо 15 потенциальных прямых можно рассматривать не более 5).

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\vec{u}_{1,i} \nparallel \vec{u}_{2,j}$  для любых  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Тогда  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \nparallel [\vec{u}_{1,t}, \vec{u}_{2,r}]$  при  $k \neq t$  и  $s \neq r$ .

**Доказательство.** Предположим, что для некоторых  $k, s, t, r$  выполняется  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \parallel [\vec{u}_{1,t}, \vec{u}_{2,r}]$ . Тогда векторы  $\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}, \vec{u}_{1,t}, \vec{u}_{2,r}$  лежат в одной плоскости. Так как оставшиеся векторы  $\vec{u}_{1,p}$  и  $\vec{u}_{2,m}$  перпендикулярны лежащим в одной плоскости векторам  $\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{1,t}$  и  $\vec{u}_{2,s}, \vec{u}_{2,r}$  соответственно, то  $\vec{u}_{1,p} \parallel \vec{u}_{2,m}$ . Полученное противоречие доказывает утверждение.

**Утверждение 2.2.** Пусть  $\vec{u}_{1,i} \nparallel \vec{u}_{2,j}$  для любых  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Тогда:

а)  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \parallel [\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,r}]$  при  $s \neq r$  тогда и только тогда, когда  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \parallel \vec{u}_{2,i}$  для  $i \neq s, i \neq r$ .

б)  $[\vec{u}_{1,s}, \vec{u}_{2,k}] \parallel [\vec{u}_{1,r}, \vec{u}_{2,k}]$  при  $s \neq r$  тогда и только тогда, когда  $[\vec{u}_{1,s}, \vec{u}_{2,k}] \parallel \vec{u}_{1,i}$  для  $i \neq s, i \neq r$ .

**Доказательство.** а) Если  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \parallel [\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,r}]$ , то векторы  $\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}, \vec{u}_{2,r}$  лежат в одной плоскости. Векторы  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}]$  и  $\vec{u}_{2,i}$  перпендикулярны этой плоскости, поэтому они параллельны между собой. Обратно, если  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \parallel \vec{u}_{2,i}$ , то  $\vec{u}_{1,k}$  лежит в той же плоскости, что и векторы  $\vec{u}_{2,r}$  и  $\vec{u}_{2,s}$ , поэтому  $[\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,s}] \parallel [\vec{u}_{1,k}, \vec{u}_{2,r}]$ . Часть б) утверждения доказывается аналогично.

Утверждения 2.1 и 2.2 показывают, что если в множестве  $C$  и есть параллельные между собой векторы, то они параллельны векторам множества  $U_1 \cup U_2$ . Тогда векторы множества  $C$  можно не проверять на параллельность между собой, достаточно проверять их на параллельность с векторами  $U_1 \cup U_2$ .

Используя доказанные утверждения, можно сократить количество потенциальных разделяющих плоскостей. Для  $k$ -ой разделяющей плоскости обозначим через  $N_k$  направляющий вектор соответствующей разделяющей оси, а через  $W_{0,k}, W_{1,k}$  - базисные векторы этой плоскости.

Для описания алгоритма вычисления векторов множеств  $N_k, W_{0,k}, W_{1,k}$  введем бинарные флаги:

f1 = 1, если в боксах нет параллельных ребер;

f2 = 1, если рассматриваемое ребро  $\vec{u}_{2,s}$  2-го бокса не параллельно ребрам 1-го бокса;

f3 = 1, если рассматриваемое векторное произведение  $R = [\vec{u}_{1,t}, \vec{u}_{2,s}]$  не параллельно ребрам 2-х боксов;

В данном алгоритме и далее сложение индексов производится по модулю 3. Переменная size определяет размер массива потенциальных разделяющих плоскостей. Как отмечалось выше, он может быть меньше 15, что приводит к уменьшению вычислительных затрат во всех последующих этапах алгоритма.

## Алгоритм вычисления базисов потенциальных разделяющих плоскостей.

**Начало.**

1. Первые 3 вектора  $N_k$  совпадают с ребрами 1-го бокса, а базисы разделяющих плоскостей образуют оставшиеся пары ребер этого же бокса:

$$N_i = \vec{u}_{1,i}, W_{0,i} = \vec{u}_{1,i+1}, W_{1,i} = \vec{u}_{1,i+2}, i = 0, 1, 2.$$

2. f1=1; // в боксах нет параллельных ребер  
k=5; // индекс общего размера массива  
j=2; // текущий индекс массива

3. Цикл по s от 0 до 2 // по ребрам 2-го бокса  
f2=1; //  $\vec{u}_{2,s}$  не параллельно ребрам 1-го бокса

Цикл по t от 0 до 2 // по ребрам 1-го бокса

$$R = [\vec{u}_{1,t}, \vec{u}_{2,s}]; // возможная разделяющая ось$$

Если  $(|R| \neq 0)$ , то

Если (f1=1), то

f3=1; // R не парал. ребрам 2-х боксов

Цикл по i от 0 до 2

Если  $(i \neq t) \& (R \parallel \vec{u}_{1,i})$  или, //утв.2.1-2.2

$(i \neq s) \& (R \parallel \vec{u}_{2,i})$ , то

f3=0;

break;

Конец Если

Конец цикла по i

Если (f3), то //R не парал. ребрам боксов

$k++$ ;  $N_k = R / \|R\|$ ;

$$W_{0,k} = \vec{u}_{2,s}, W_{1,k} = [N_k, W_{0,k}].$$

Конец Если

Конец Если

Иначе // т.е.  $\vec{u}_{1,t} \parallel \vec{u}_{2,s}$ , утв. 1

f1=0; f2=0; break;

Конец цикла по t

Если (f2), то //  $\vec{u}_{2,s}$  не парал. ребрам 1 бокса

$$j++; N_j = \vec{u}_{2,s}, W_{0,j} = \vec{u}_{2,s+1}, W_{1,j} = \vec{u}_{2,s+2}$$

Конец цикла по s

4. Если f1=1, то // все ребра 2-х боксов не параллельны  
size = k + 1

Иначе

size = j + 1

**Конец.**

## **5. Определение коллизии двух боксов**

Как было отмечено в п. 3, для определения коллизии (пересечения) двух боксов  $B_1$  и  $B_2$  необходимо установить, что для любого вектора  $\vec{w} \in U$  разделяющей оси проекции боксов  $B_1$  и  $B_2$  на ось  $\vec{w}$  пересекаются.

**Утверждение 3.** Проекция бокса на произвольную ось совпадает с проекцией на эту ось одной из его диагоналей.

**Доказательство.** Пусть  $mM$  - проекция бокса на произвольную ось  $\vec{l} \in U$  (здесь  $m < M$ , см. рис. 3). Так как бокс является выпуклой оболочкой множества вершин, то его проекция также равна выпуклой

оболочке проекций этих вершин. Поэтому существует вершина  $\vec{u}_m$ , которая проецируется в  $m$ . Поместим начало координат бокса в эту вершину, а оси  $(x, y, z)$  возьмем равными сторонам бокса. Вершины бокса в этой системе координат задаются в виде  $\vec{u}_i = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$ ,  $i = 1 \div 8$ , где  $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$ . Тогда проекция  $i$ -ой вершины на ось  $\vec{l}$  равна  $\vec{u}_i' = (\vec{u}_i, \vec{l}) = \alpha\vec{x}' + \beta\vec{y}' + \gamma\vec{z}'$ , где  $(x', y', z')$  - проекции осей системы координат бокса на ось  $\vec{l}$ . Очевидно, что максимальное значение  $M$  будет достигаться при  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , т.е.  $\vec{u}_M = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ . При этом вершины  $\vec{u}_m$  и  $\vec{u}_M$  лежат на одной диагонали бокса, что и требовалось доказать.

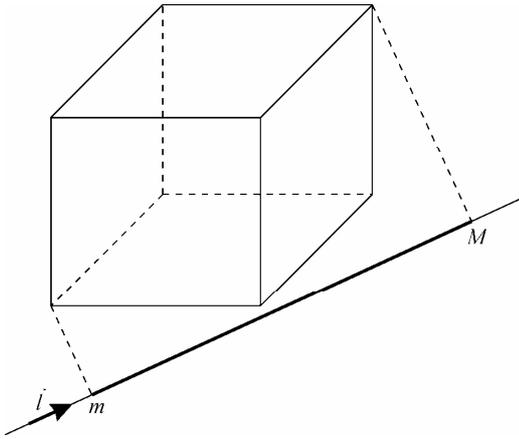


Рис. 3. Проекция бокса на произвольную ось  $\vec{l} \in U$

Естественно, что в одну точку  $m$  может проецироваться некоторое множество  $U_m$  вершин бокса (одна, две или четыре вершины, т.к. проекцию  $m$  может давать вершина, ребро или грань бокса соответственно). Тогда максимальную проекцию  $M$  будут задавать вершины  $U_M$ , лежащие по другие стороны диагоналей бокса относительно вершин  $U_m$ . Поэтому при вычислении проекции сначала находится точка  $m$ , а  $M$  вычисляется как проекция второй вершины соответствующей диагонали. Это позволяет почти вдвое сократить расчеты по нахождению проекции бокса на ось  $\vec{l} \in U$ .

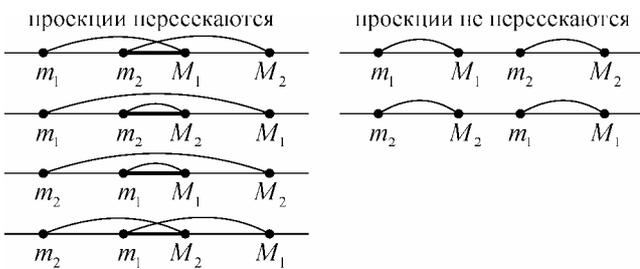


Рис. 4. Всевозможные взаимные расположения отрезков проекций двух боксов

Пусть проекциями боксов  $B_1$  и  $B_2$  на ось  $\vec{l} \in U$  являются отрезки  $m_1M_1$  и  $m_2M_2$ . Из рис. 4 видно, что отрезки  $m_1M_1$  и  $m_2M_2$  не пересекаются тогда и только

тогда, когда

$$\text{sign}(M_2 - m_1) \neq \text{sign}(M_1 - m_2) \quad (1)$$

Если же для  $\forall \vec{l} \in U$  неравенство (1) не выполняется, то это означает, что между боксами  $B_1$  и  $B_2$  существует коллизия. При этом отрезок пересечения проекций боксов на ось  $\vec{l}$  будет равен  $[\max(m_1, m_2), \min(M_1, M_2)]$ .

## 6. Вычисление глубины пересечения двух боксов и нормали контакта

Если боксы пересекаются, то для нахождения области их первоначального контакта необходимо раздвинуть их (с их обратными скоростями) так, чтобы по любой из разделяющих осей их проекции пересекались не более, чем в одной точке. На рис. 5 показано пересечение вершины одного бокса с гранью другого, но возможны и другие случаи пересечения (например, ребро с ребром или с гранью, грань с гранью и т.д.). Для каждой разделяющей плоскости  $G_i$  можно вычислить время  $dT_i$ , необходимое для раздвижения боксов, при котором их проекции на соответствующую разделяющую ось будут касаться друг друга.

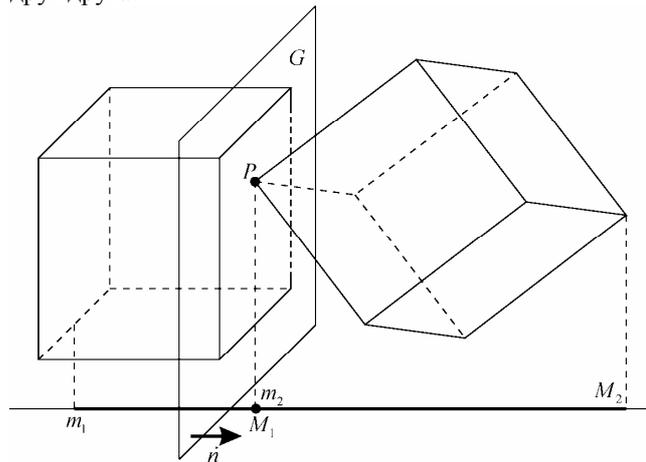


Рис. 5. Точка  $P$  первоначального контакта двух боксов

Обозначим через  $\vec{V}_R = \vec{V}_{B_1} - \vec{V}_{B_2}$  скорость движения бокса  $B_1$  относительно  $B_2$ . Рассмотрим ось  $\vec{l}_i \in U$  и проекцию  $V_{R, \vec{l}_i} = (\vec{V}_R, \vec{l}_i)$  относительной скорости боксов на эту ось. Пусть  $L_i$  - расстояние, на которое надо сдвинуть проекцию  $B_1$  в направлении  $(-\vec{V}_R)$ , чтобы она не пересекалась с проекцией  $B_2$ . Так как боксы (а значит и их проекции) могут двигаться в одну или в разные стороны, то рассмотрим все возможные взаимные расположения отрезков проекций двух боксов на ось  $\vec{l}_i$  при их пересечении, а также проекцию их относительной скорости движения (см. рис. 6а,б). Поскольку мы рассматриваем скорость движения бокса  $B_1$  относительно  $B_2$ , то можно считать, что движется только проекция  $B_1$  со ско-

ростью  $V_{R,\vec{l}_i}$  относительно неподвижной проекции  $B_2$ . На рисунке жирной линией выделен отрезок пересечения проекций, а дугой – отрезок, на который необходимо раздвинуть проекции с обратными скоростями. Из рисунка видно, что при  $V_{R,\vec{l}_i} < 0$  имеем  $L_i = M_2 - m_1$ , а при  $V_{R,\vec{l}_i} > 0$  получаем  $L_i = M_1 - m_2$ . Если же  $V_{R,\vec{l}_i} = 0$ , то это означает, что вдоль рассматриваемой оси  $\vec{l}_i$  боксы относительно друг друга не движутся, поэтому эту ось можно не рассматривать.

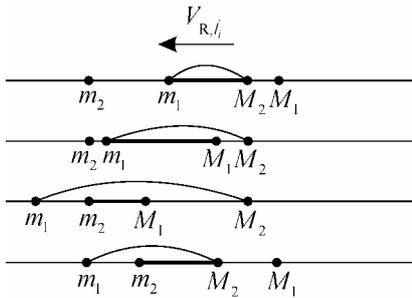


Рис. ба. Расположение проекций боксов при  $V_{R,\vec{l}_i} < 0$

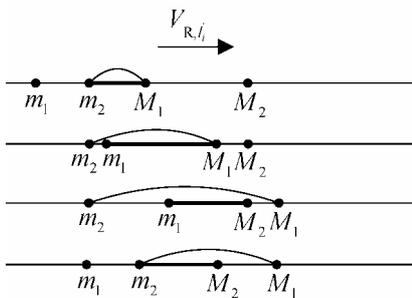


Рис. бб. Расположение проекций боксов при  $V_{R,\vec{l}_i} > 0$

Время раздвижения проекций вдоль оси  $\vec{l}_i$  будет равно  $dT_i = |L_i / V_{R,\vec{l}_i}|$ , а искомое время раздвижения боксов  $dT = \min(dT_i)$ . Если минимум достигается на оси  $\vec{l}_{i_0}$ , то под глубиной пересечения боксов  $B_1$  и  $B_2$  будем понимать величину  $d = L_{i_0}$  вдоль вектора  $\vec{l}_{i_0}$ . При этом вектор  $\vec{l}_{i_0}$  будем считать нормалью контакта двух боксов, т.е.  $\vec{n} = \vec{l}_{i_0}$ .

## 7. Вычисление точки первоначального контакта двух боксов

Первоначальный контакт между двумя боксами может быть следующих типов: вершина одного бокса с вершиной, ребром или гранью другого; ребро одного бокса с ребром или гранью другого и грань одного бокса с гранью другого. Запишем вершины, задающие эти элементы боксов, во множества вершин  $Q_1$  и  $Q_2$  первоначального контакта боксов  $B_1$  и  $B_2$ . Все эти элементы лежат в одной плоскости – разделяющей плоскости  $G_{i_0}$ . В дальнейшем для упрощения мы

будем опускать индекс  $i_0$  и обозначать эту плоскость просто  $G$ . Множества  $Q_1$  и  $Q_2$  задают элементы, пересечение которых образует область контакта двух боксов.

Если пересечением проекций боксов на ось  $\vec{n}$  является отрезок  $m_1M_2$  (см. рис. ба), то  $Q_1 = V_{m_1}$  и  $Q_2 = V_{M_2}$ . Если же пересечением проекций является отрезок  $m_2M_1$  (рис. бб), то  $Q_1 = V_{M_1}$  и  $Q_2 = V_{m_2}$ .

Если хотя бы в одном из боксов  $B_1$  или  $B_2$  в коллизии участвует только одна вершина ( $|Q_1| = 1$  или  $|Q_2| = 1$ ), то эта вершина и будет являться искомой точкой  $P$  первоначального контакта. Остальные случаи разберем отдельно.

Поскольку все вершины множеств  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в одной плоскости  $G$ , то для упрощения нахождения области контакта можно перейти из трехмерного пространства в плоскость  $G$ . Нормаль и базис плоскости  $G$  задаются векторами  $\{U_{i_0}, W_{1,i_0}, W_{2,i_0}\}$  (см.

пп. 4, 6). Смещение  $\vec{S}$  плоскости относительно начала координат будет совпадать с точкой касания проекций боксов на ось  $\vec{n}$  в момент их первоначального контакта (на рис. 5 это точки  $M_1$  и  $m_2$ ). Пусть  $V_{1,\vec{n}} = (\vec{V}_1, \vec{n})$  и  $V_{2,\vec{n}} = (\vec{V}_2, \vec{n})$  проекции скоростей боксов на нормаль  $\vec{n}$  их контакта. Если проекции боксов на ось  $\vec{n}$  пересекаются по отрезку  $m_1M_2$  (см. рис. ба), то  $\vec{S} = (m_1 - V_{1,\vec{n}}dT)\vec{n}$  или  $\vec{S} = (M_2 - V_{2,\vec{n}}dT)\vec{n}$ . Если же проекции боксов на ось  $\vec{n}$  пересекаются по отрезку  $m_2M_1$  (см. рис. бб), то  $\vec{S} = (M_1 - V_{1,\vec{n}}dT)\vec{n}$  или  $\vec{S} = (m_2 - V_{2,\vec{n}}dT)\vec{n}$ . Составим матрицу, задающую положение и ориентацию плоскости  $G$ :

$$M_G = \{U_{i_0} / |U_{i_0}|, W_{1,i_0} / |W_{1,i_0}|, W_{2,i_0} / |W_{2,i_0}|, I, S\}$$

Матрица  $M_G$  является матрицей перехода из системы координат плоскости  $G$  в мировую систему координат. Тогда обратная матрица  $M_G^{-1}$  будет матрицей перехода из мировой системы координат в плоскость. Помножим координаты вершин  $Q_1$  и  $Q_2$  на матрицу  $M_G^{-1}$  и обозначим полученные координаты множеств вершин как  $Q_{1,G} = M_G^{-1}Q_1$  и  $Q_{2,G} = M_G^{-1}Q_2$ . Тогда вершины  $Q_{1,G}$  и  $Q_{2,G}$  будут лежать в плоскости  $G$ . При этом первая координата всех полученных вершин будет равна 0, поскольку  $U_{i_0}$  в матрице  $M_G$  является нормалью к плоскости  $G$ , а вершины  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в самой плоскости  $G$ . Поэтому первую координату вершин во множествах  $Q_{1,G}$  и  $Q_{2,G}$  можно отбросить и далее рассматривать случай нахождения точки  $P$  первоначального контакта боксов на плоскости.

В зависимости от количества вершин во множествах вершин  $Q_1$  и  $Q_2$  первоначальный контакт будет следующего типа:

- при  $|Q_1| = |Q_2| = 2$  контакт типа ребро-ребро;
- при  $|Q_1| = 2$  и  $|Q_2| = 4$  или  $|Q_1| = 4$  и  $|Q_2| = 2$  контакт типа ребро-грань;
- при  $|Q_1| = |Q_2| = 4$  контакт типа грань-грань.

Во всех перечисленных случаях ребра и/или грани будут задавать вершины из множеств  $Q_{1,G}$  и  $Q_{2,G}$ .

## 7.1. Контакт ребро-ребро

В этом случае точкой  $P$  будет являться точка пересечения двух ребер боксов  $P_{1,1}P_{1,2}$  и  $P_{2,1}P_{2,2}$ , лежащих в плоскости  $G$  (см. рис. 7).

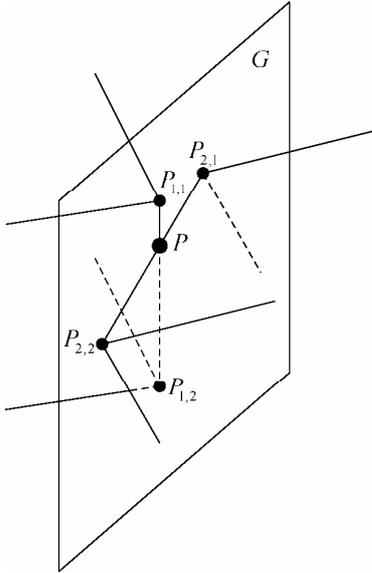


Рис. 7. Контакт ребро-ребро

Для нахождения точки  $P$  можно воспользоваться известным алгоритмом нахождения точки пересечения двух отрезков на плоскости, задав эти отрезки параметрически:

$$P_1 = P_{1,1} + (P_{1,2} - P_{1,1})t$$

$$P_2 = P_{2,1} + (P_{2,2} - P_{2,1})s,$$

где  $P_1$  и  $P_2$  точки, лежащие на прямых, содержащих в себе отрезки  $P_{1,1}P_{1,2}$  и  $P_{2,1}P_{2,2}$ , соответственно.

Тогда в случае пересечения отрезков должны существовать  $t$  и  $s$  такие, что:

$$P_{1,1} + (P_{1,2} - P_{1,1})t = P_{2,1} + (P_{2,2} - P_{2,1})s$$

Если дискриминант  $D$  данной системы уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение  $t_0, s_0$ . Так как известно, что отрезки пересекаются, то  $0 \leq t_0, s_0 \leq 1$  и искомая точка

$$P = P_{1,1} + (P_{1,2} - P_{1,1})t_0.$$

Если  $D = 0$ , то отрезки  $P_{1,1}P_{1,2}$  и  $P_{2,1}P_{2,2}$  лежат на одной прямой  $l$ . Тогда необходимо найти значения параметров  $t_1, t_2$  концов отрезка  $P_{2,1}P_{2,2}$  на прямой  $l$  в параметризации отрезка  $P_{1,1}P_{1,2}$  (концы которого имеют параметры 0, 1). Каждое из уравнений

$$P_{2,1} = P_{1,1} + (P_{1,2} - P_{1,1})t_1$$

$$P_{2,2} = P_{1,1} + (P_{1,2} - P_{1,1})t_2$$

имеет единственное решение, т.к.  $P_{1,2} \neq P_{1,1}$ .

Для вычисления параметров пересечения отрезков получаем простой алгоритм:

1. Если  $t_1 > t_2$ , то меняем их местами

$$r = t_1, t_1 = t_2, t_2 = r.$$

2. Если  $t_1 < 0$ , то  $t_1 = 0$ .

3. Если  $t_2 > 1$ , то  $t_2 = 1$ .

Заметим, что, так как отрезки пересекаются, то не могут выполняться неравенства  $t_1 > 1$  или  $t_2 < 0$ .

Параметры  $t_1$  и  $t_2$  будут задавать положение концов отрезка пересечения  $P_{1,1}P_{1,2}$  и  $P_{2,1}P_{2,2}$ . В качестве точки  $P$  возьмем середину этого отрезка:

$$P = P_{1,1} + (P_{1,2} - P_{1,1}) \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

## 7.2. Контакт ребро-грань

Точкой  $P$  будет являться середина отрезка пересечения ребра  $P_{1,1}P_{1,2}$  одного бокса и грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  второго в плоскости  $G$  (см. рис. 8).

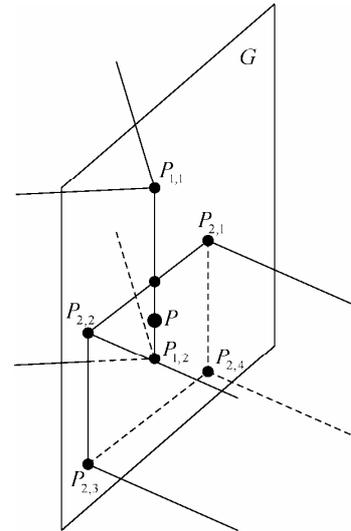


Рис. 8. Контакт ребро-грань

Найдем точку  $P$  при помощи известного алгоритма Сазерленда-Ходгмана отсечения выпуклыми многоугольниками, адаптированного для случая отсечения отрезка (в данном случае отсечение ребра  $P_{1,1}P_{1,2}$  гранью  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ ). Идея алгоритма состоит в том, чтобы последовательно отсекал отрезок  $P_{1,1}P_{1,2}$  относительно каждого ребра грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  поочередно, оставляя только ту часть, которая находится внутри  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ .

Рассмотрим последовательные отсечения ребра  $P_{1,1}P_{1,2}$  ребрами грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  в разделяющей плоскости  $G$  (см. рис. 9). На рисунке 9а и 9б показаны начальная и конечная ситуации. Рисунки 9в, 9с, 9д, 9е иллюстрируют поочередное отсечение ребра  $P_{1,1}P_{1,2}$  ребрами грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ .

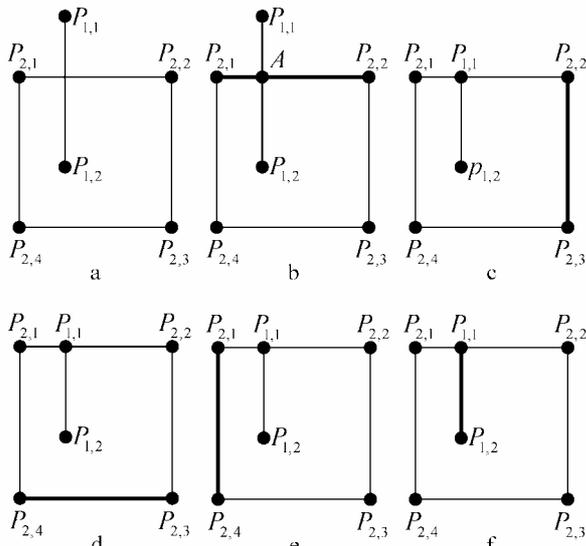


Рис. 9. Отсечение ребра  $P_{1,1}P_{1,2}$  гранью  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$

Отсечение происходит по следующему принципу:

1) Определяется, в какой полуплоскости (внутренней или внешней) относительно прямой, содержащей рассматриваемое ребро грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , лежат концы отрезка  $P_{1,1}P_{1,2}$ ;

2) В зависимости от положения концов отрезка  $P_{1,1}P_{1,2}$  относительно прямой, содержащей рассматриваемое ребро  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , возможны следующие случаи:

- концы отрезка лежат в разных полуплоскостях. Тогда ищется точка  $A$  пересечения отрезка  $P_{1,1}P_{1,2}$  и ребра грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ . Конец отрезка, лежащий во внешней полуплоскости ребра  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , заменяется найденной точкой пересечения  $A$ ;

- один из концов отрезка лежит на ребре  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , а второй во внешней полуплоскости. В этом случае второй конец отбрасывается и отрезок вырождается в точку;

- оба конца отрезка лежат во внешней полуплоскости. Тогда отрезок  $P_{1,1}P_{1,2}$  и грань  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  не имеют пересечения, и оставшиеся ребра  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  не рассматриваются.

- оба конца отрезка лежат во внутренней полуплоскости. В этом случае ничего не делается.

Чтобы определить, какая полуплоскость является внутренней/внешней по отношению к ребрам грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , надо задать определенный порядок их обхода. Если обходить ребра грани по часовой стрелке, то вершины, лежащие слева от рассматриваемого ребра, будут лежать во внешней плоскости, а справа – во внутренней.

Чтобы определить, в какой полуплоскости лежит, например, конец отрезка  $P_{1,1}$  относительно ребра  $P_{2,1}P_{2,2}$ , достаточно определить знак  $z$ -ой координаты векторного произведения векторов  $P_{2,2} - P_{2,1}$  и  $P_{1,1} - P_{2,1}$ :

$$z = [P_{2,2} - P_{2,1}, P_{1,1} - P_{2,1}]_z \quad (2)$$

Если  $z > 0$ , то  $P_{1,1}$  лежит слева от  $P_{2,1}P_{2,2}$ , если  $z < 0$ , то  $P_{1,1}$  лежит справа от  $P_{2,1}P_{2,2}$  и если  $z = 0$ , то  $P_{1,1}$  лежит на  $P_{2,1}P_{2,2}$ .

Таким образом, поочередно отсекая отрезок  $P_{1,1}P_{1,2}$  относительно ребер грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , получим результирующий отрезок  $P_{1,1}P_{1,2}$ , который целиком лежит внутри грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ . Тогда, точкой  $P$  будет являться середина этого отрезка:

$$P = (P_{1,1} + P_{1,2})/2$$

### 7.3. Контакт грань-грань

В этом случае точкой  $P$  будет являться центр масс многоугольника пересечения двух граней  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$  и  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  боксов в плоскости  $G$  (см. рис. 10). Многоугольник пересечения изображен жирными линиями, а его вершины – маленькими точками.

Многоугольник пересечения будем искать при помощи того же алгоритма Сазерленда-Ходгмана отсечения выпуклым многоугольником. Отсекать будем грань  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$  одного бокса гранью  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  второго. Алгоритм строится по тому же принципу, что и в пункте 7.2, только отсекаются по очереди все ребра грани  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$  гранью  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ .

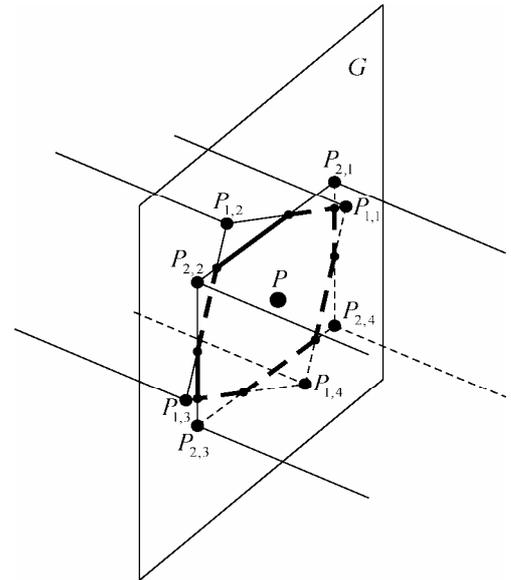


Рис. 10. Контакт грань-грань

Алгоритм имеет следующие этапы:

1) Пусть  $SP$  – очередное ребро, взятое из грани  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$ . Определяется, в какой полуплоскости (внутренней или внешней) относительно прямой, содержащей рассматриваемое очередное взятое ребро грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , лежит отрезок  $SP$ ;

2) Составляется новое множество вершин с учетом отсечения рассматриваемого отрезка  $SP$  ребром грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ . В зависимости от положения отрезка  $SP$

относительно прямой, содержащей рассматриваемое ребро грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , в множество вершин записывается:

- $P$ , если  $S$  и  $P$  лежат во внутренней полуплоскости относительно ребра;
- $K$  и  $P$ , если  $S$  лежит во внешней, а  $P$  во внутренней полуплоскостях ( $K$  – точка пересечения ребер);
- $K$ , если  $S$  лежит во внутренней, а  $P$  во внешней полуплоскостях ( $K$  – точка пересечения ребер);
- ничего не записываем, если  $S$  и  $P$  лежат во внешней полуплоскости относительно ребра.

3) Повторяем пункт 2 для всех ребер грани  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$ . Когда все ребра отсечены текущим рассматриваемым ребром грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , берем следующее ребро грани  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$  и т.д.

Важно заметить, что по аналогии с п. 7.2, грань, по которой идет отсечение (в данном случае  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ ), необходимо обходить по часовой стрелке. Тогда определение внешней/внутренней полуплоскости можно производить в соответствии со знаком выражения (2).

Рассмотрим описанный алгоритм на примере (рис. 11). Рисунок 11а показывает начальное положение граней  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$  и  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$ , рис. 11б – полученный в результате отсеченный многоугольник. Разберем каждый промежуточный шаг в отдельности.

На рисунке 11б производится отсечение грани  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$  ребром  $P_{2,1}P_{2,2}$ . В соответствии с алгоритмом на выходе получается многоугольник  $A_1P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}A_2$ . Далее на рис. 11с производится отсечение полученного многоугольника ребром  $P_{2,2}P_{2,3}$ . Получаем многоугольник  $A_3A_4P_{1,3}P_{1,4}A_2A_1$ . После отсечения ребром  $P_{2,3}P_{2,4}$  (рис. 11д) – многоугольник  $A_4A_5A_6P_{1,4}A_2A_1A_3$ . И, наконец, итоговый многоугольник (рис. 11е) состоит из вершин  $A_5A_6A_7A_8A_2A_1A_3A_4$ .

Как уже было сказано, точку  $P$  будем вычислять, как центр масс полученного многоугольника пересечения. Пусть  $M$  – множество ребер полученного многоугольника пересечения (причем число  $N$  таких ребер пересечения двух граней может быть от 1 до 8). Припишем каждому ребру из  $M$  массу  $m_i$ , равную длине этого ребра и сосредоточенную в центре  $R_i$

ребра. Тогда точку  $P$  определим как центр масс множества ребер из  $M$ :

$$P = \frac{\sum_{i=1}^N m_i R_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Посчитав точку  $P$  в плоскости  $G$ , необходимо перевести ее обратно в мировую систему координат. Для этого ее надо помножить на матрицу  $M_G$  перехода из системы координат плоскости  $G$  в мировую систему координат:  $P = M_G P$ . Тогда получим координаты точки  $P$  первоначального контакта двух боксов в мировой системе координат.

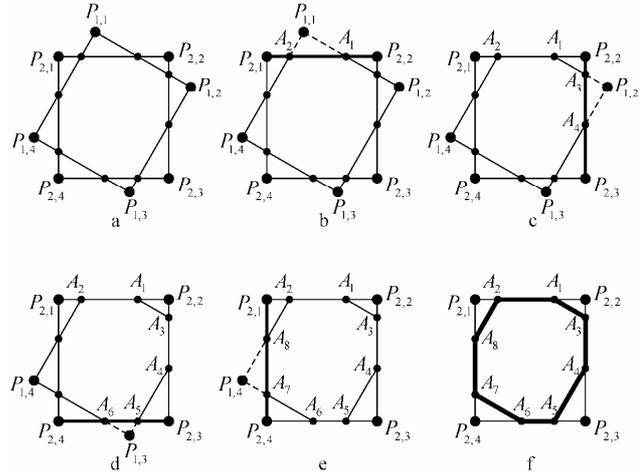


Рис. 11. Отсечение грани  $P_{1,1}P_{1,2}P_{1,3}P_{1,4}$  гранью  $P_{2,1}P_{2,2}P_{2,3}P_{2,4}$

По вычисленной нормали  $\vec{n}$  контакта, глубине  $d$  пересечения двух боксов вдоль нормали  $\vec{n}$  и точке первоначального контакта  $P$  можно задать соответствующую реакцию (расталкивание) боксов на столкновение на основе физических законов ударов различных типов.

## Литература

1. Ф. Хилл. OpenGL. Программирование компьютерной графики. Для профессионалов. – СПб.: Питер, 2002. – 1088 с.
2. Hyperplane separation theorem. Wikipedia. The Free Encyclopedia. Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperplane\\_separation\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperplane_separation_theorem).

# Computation of rectangular parallelepipeds collision detection in dynamics

M.V. Mikhaylyuk, A.M. Trushin

**Abstract.** To accelerate collision detection computation of virtual dynamic objects in 3D scenes for simulator these objects are approximated with rectangular parallelepipeds (boxes). We propose here the algorithm for definition and handling with boxes collisions, which is improved modification of the algorithm, based on the separating axis.

# Моделирование рассветного и закатного освещения в космических видеотренажерах

П.Ю. Тимохин

В статье предлагается метод моделирования рассветного и закатного освещения в космических видеотренажерных комплексах. Предлагаемый метод основан на физическом моделировании изменения спектра солнечного света, проходящего через атмосферу Земли, и позволяет синтезировать изображения космических объектов с реалистичным рассветным и закатным освещением. Также в статье рассматриваются вопросы вычисления смоделированного освещения с учетом выполнения в реальном времени.

## Введение

В настоящее время при тренировке космонавтов активно используются видеотренажерные комплексы, в которых окружающая обстановка моделируется с помощью трехмерных виртуальных сцен, синтезируемых на экране компьютера в реальном масштабе времени [1]. Одной из важных задач таких комплексов является моделирование рассветного и закатного освещения объектов, находящихся в околоземном пространстве, например, Международной космической станции (МКС), космических кораблей и др. Ключевым аспектом освещения в периоды рассвета и заката является изменение спектра падающего на космический объект солнечного света при прохождении света через атмосферу Земли. В данной работе предлагается метод моделирования такого освещения и рассматривается его вычисление с учетом выполнения в реальном времени.

## 1. Постановка задачи

Пусть имеется трехмерная виртуальная сцена, содержащая модель Земли и модель объекта, находящегося на ее орбите, а также источник освещения, имитирующий Солнце. Спектр данного источника освещения моделируется тремя интенсивностями для волн, соответствующих красному, зеленому и синему цвету видимого диапазона и задается RGB-цветом  $C_C$ , компоненты которого приведены к диапазону [0, 1].

При моделировании освещения в данной работе принимаются следующие допущения:

- спектр солнечного света меняется только при прохождении через атмосферу;
- учитывается только прямой солнечный свет (не учитывается отражение от Земли);
- рассветное и закатное освещение моделируются одинаково;
- солнечные лучи параллельны, ввиду высокой удаленности Солнца от освещаемого космического объекта;
- во всех освещаемых точках космического объекта спектр падающего солнечного света одинаков (т.к. размеры объекта много меньше расстояния до Солнца);
- поверхность Земли и атмосфера моделируются сферами радиуса  $R_3$  и  $R_{ATM}$ .

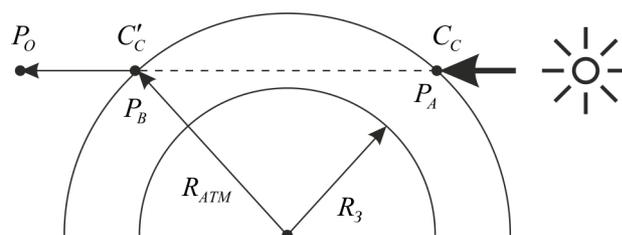


Рис. 1

Рассмотрим солнечный луч, направленный из Солнца в точку  $P_O$  положения космического объекта через атмосферу Земли (рис. 1). Пусть  $P_A$  и  $P_B$  – точки входа и выхода луча из земной атмосферы, а  $C_C$  – цвет луча в точке входа в атмосферу. Тогда с учетом принятых допущений рассветное и закатное освещение космического объекта можно смоделировать, найдя цвет  $C'_C$  солнечного луча в точке  $P_B$ .

## 2. Моделирование оптических свойств атмосферы

В данной работе цвет  $C'_C$  предлагается вычислить на основе физического моделирования изменения спектра света, проходящего через атмосферу Земли [2]. Компоненты цвета  $C'_C$  можно вычислить на основе ослабления интенсивностей монохроматических излучений длин волн, соответствующих красному ( $\lambda_R$ ), зеленому ( $\lambda_G$ ) и синему ( $\lambda_B$ ) спектральным цветам видимого диапазона. Для этого необходимо смоделировать оптические свойства атмосферы, вызывающие ослабление света, и вывести уравнение, позволяющее количественно определить ослабление интенсивности  $I_\lambda$  излучения в зависимости от длины волны  $\lambda$  видимого диапазона.

В видимой области спектра решающими механизмами ослабления солнечного излучения в атмосфере являются молекулярное рассеяние и аэрозольное рассеяние и поглощение [3].

Рассмотрим атмосферу как сферический слой, состоящий из усредненных молекул воздуха и аэрозольных частиц, плотности которых уменьшаются по мере отдаления от Земли экспоненциально с коэффициентами  $\rho_M$  и  $\rho_A$ :

$$\rho_M(h) = e^{-h/H_M}, \quad \rho_A(h) = e^{-h/H_A}, \quad (1)$$

где  $h$  – высота над поверхностью Земли,  $H_M, H_A$  – высота однородной атмосферы, состоящей из частиц соответствующего типа ( $H_M \approx 8$  км,  $H_A \approx 1,2$  км).

Молекулы воздуха являются «малыми» частицами, поэтому рассеяние света на них может быть смоделировано рассеянием Релея. Аэрозоли аппроксимируются «крупными» сферическими частицами, рассеяние на которых описывается теорией Ми. Каждое из приведенных рассеяний задается объемным коэффициентом рассеяния  $\sigma$ , определяющим долю света, которая рассеивается одной частицей, и индикатрисой (фазовой функцией) рассеяния  $F(\theta)$ , которая является отношением интенсивности излучения, рассеянного в данном направлении  $\theta$ , к средней интенсивности, рассеянной во всех направлениях ( $\theta$  – это угол между направлениями падающей и рассеянной волн). В нашей задаче мы будем рассматривать рассеяние только в направлении  $\theta = 0$ .

Объемные коэффициенты  $\sigma_M$  и  $\sigma_A$  молекулярного рассеяния Релея и аэрозольного рассеяния Ми имеют следующий вид:

$$\sigma_M(\lambda) = \frac{8\pi^3(n_e^2 - 1)^2}{3N_M\lambda^4}, \quad \sigma_A = \frac{8\pi^3(n_e^2 - 1)^2}{3N_A} \quad (2)$$

где  $n_e$  – показатель преломления света в атмосфере Земли на уровне моря, а  $N_M$  и  $N_A$  – количественные концентрации усредненных молекул и аэрозольных частиц в атмосфере Земли на уровне моря.

Индикатриса  $F_M(\theta)$  молекулярного рассеяния Релея задается функцией

$$F_M(\theta) = 3(1 + \cos^2 \theta) / 4.$$

При  $\theta = 0$  получаем

$$F_M = F_M(0) = 1,5. \quad (3)$$

Для моделирования аэрозольного рассеяния Ми распространено использование индикатрисы  $F_A(\theta, g)$  Хенри–Гринштейна с улучшением Корнета–Шанкса [4]:

$$F_A(\theta, g) = \frac{3(1 - g^2)}{2(2 + g^2)} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}},$$

где  $g \in [-1, 1]$  – коэффициент асимметрии, характеризующий степень асимметрии индикатрисы рассеяния. В данной работе значение  $g$  принимается равным 0.76 на основе данных из стандартной модели безоблачной атмосферы [5]. При  $\theta = 0$  получаем

$$F_A = F_A(0, 0.76) = 4,85. \quad (4)$$

Затухание света на молекулах и аэрозольных частицах характеризуется объемными коэффициентами ослабления  $\alpha_M$  и  $\alpha_A$ :

$$\alpha_M = \sigma_M, \quad \alpha_A = \sigma_A + k_A, \quad (5)$$

где  $\sigma_M$  и  $\sigma_A$  – объемные коэффициенты рассеяния из (2), а  $k_A$  – объемный коэффициент аэрозольного поглощения. В данной работе для учета аэрозольного поглощения принимается  $\alpha_A = \sigma_A / 0.9$ .

Затухание света при прохождении через слой атмосферы длины  $L$  характеризуется оптическими толщинами  $\tau_M(L, \lambda)$  и  $\tau_A(L, \lambda)$  (для молекул и аэрозолей) этого участка. Из-за неоднородности атмосферы оптическая толщина вычисляется путем интегрирования объемного коэффициента ослабления вдоль  $L$ :

$$\tau_M(L, \lambda) = \int_0^L \alpha_M(\lambda) \rho_M(h(l)) dl,$$

$$\tau_A(L, \lambda) = \int_0^L \alpha_A(\lambda) \rho_A(h(l)) dl,$$

где  $\rho_M, \rho_A, \alpha_M$  и  $\alpha_A$  определяются формулами (1) и (5). Общая оптическая толщина  $\tau$  слоя атмосферы находится как сумма их отдельных оптических толщин  $\tau_M$  и  $\tau_A$ :

$$\begin{aligned} \tau(L, \lambda) &= \tau_M(L, \lambda) + \tau_A(L, \lambda) = \\ &= \alpha_M \int_0^L \rho_M(h(l)) dl + \alpha_A \int_0^L \rho_A(h(l)) dl. \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. Моделирование интенсивности луча, прошедшего через атмосферу

Рассмотрим солнечный луч длины волны  $\lambda$ , испущенный с интенсивностью  $I_C$  (здесь и далее индексы  $\lambda$  опускаются), проходящий через атмосферу и попадающий в точку  $P_O$  (рис. 2). Найдем интенсивность  $I_O$  луча в точке  $P_O$ .

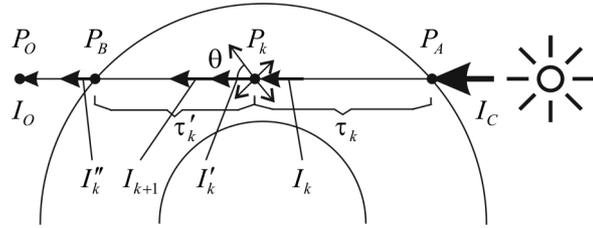


Рис. 2

На участках от Солнца до  $P_A$  и от  $P_B$  до  $P_O$  интенсивность луча не изменяется (согласно принятому допущению). На участке  $P_AP_B$  интенсивность луча ослабляется за счет рассеяния (во всех направлениях) и поглощения в атмосфере. В точку  $P_O$  луч приходит с интенсивностью  $I_{затух.}$ , величину которой можно найти с помощью закона Бугера–Ламберта–Бера:

$$I_{затух.} = I_C e^{-\tau_{AB}}, \quad (7)$$

где  $\tau_{AB}$  – оптическая толщина отрезка  $P_AP_B$ .

К этой интенсивности надо добавить интенсивности рассеяний в направлении точки  $P_O$  из каждой точки  $P_k$  отрезка  $P_AP_B$ . В точку  $P_k$  луч приходит с интенсивностью

$$I_k = I_C e^{-\tau_k}, \quad (8)$$

где  $\tau_k$  – оптическая толщина отрезка  $P_AP_k$ .

Интенсивность  $I'_k$  рассеянного луча, выходящего из  $P_k$  в направлении  $P_O$ , определяется как:

$$I'_k = \sigma F \rho_k I_k, \quad (9)$$

где в качестве  $\sigma, F$  и  $\rho$  для молекулярного рассеяния берутся  $\sigma_M, F_M$  и  $\rho_M$ , а для аэрозольного –  $\sigma_A, F_A$  и  $\rho_A$  (см. (2), (3), (4) и (1)).

Далее луч рассеяния затухает на отрезке  $P_kP_B$  и приходит в точку  $P_O$  с интенсивностью  $I''_k$ :

$$I''_k = I'_k e^{-\tau'_k}, \quad (10)$$

где  $\tau'_k$  – оптическая толщина отрезка  $P_kP_B$ . Подставив в (10) формулы (9) и (8), получим:

$$I_k^r = I_C \sigma F \rho_k e^{-(\tau_k + \tau_k^r)} = I_C \sigma F \rho_k e^{-\tau_{AB}}. \quad (11)$$

Интенсивность  $I_{\text{расс}}$  лучей рассеяния, пришедших в точку  $P_O$  от всех точек отрезка  $P_A P_B$  можно найти как:

$$I_{\text{расс}} = \int_{P_A}^{P_B} I_k^r dl = I_C \sigma F e^{-\tau_{AB}} \int_{P_A}^{P_B} \rho_k dl. \quad (12)$$

Обозначив через  $I_{\text{расс},M}$  и  $I_{\text{расс},A}$  интенсивности, вычисленные по (12) для молекулярного и аэрозольного рассеяния соответственно, найдем результирующую интенсивность  $I_O$  в точке  $P_O$ :

$$\begin{aligned} I_O &= I_{\text{затух.}} + I_{\text{расс.,M}} + I_{\text{расс.,A}} = I_C e^{-\tau_{AB}} + \\ &+ I_C \sigma_M F_M e^{-\tau_{AB}} \int_{P_A}^{P_B} \rho_{k,M} dl + I_C \sigma_A F_A e^{-\tau_{AB}} \int_{P_A}^{P_B} \rho_{k,A} dl = \\ &= I_C e^{-\tau_{AB}} \left( 1 + \sigma_M F_M \int_{P_A}^{P_B} \rho_{k,M} dl + \sigma_A F_A \int_{P_A}^{P_B} \rho_{k,A} dl \right). \end{aligned} \quad (13)$$

#### 4. Вычисление цвета луча, прошедшего через атмосферу

Для вычисления искомого цвета  $C'_C$  луча (рис. 1) необходимо вычислить интенсивности  $I_O(\lambda_R)$ ,  $I_O(\lambda_G)$  и  $I_O(\lambda_B)$ . Из (13) и (6) видно, что для вычисления  $I_O$  необходимо вычислить интеграл вида:

$$\int_0^L \rho(h(l)) dl, \quad (14)$$

где  $L$  – длина отрезка  $P_A P_B$ , а  $\rho(h(l))$  можно выразить из (1) как:

$$\rho(l) = \exp(-(r(l) - R_3)/H),$$

где  $r(l)$  – расстояние от центра Земли до рассматриваемой точки, а  $R_3$  – радиус Земли. Расстояние  $r(l)$  найдем из  $\Delta P_3 P_A P_k$  с помощью теоремы косинусов (рис. 3):

$$r(l) = \sqrt{R_{\text{ATM}}^2 + l^2 - 2R_{\text{ATM}} l \cos \beta},$$

где  $\cos \beta = L/(2R_{\text{ATM}})$ .

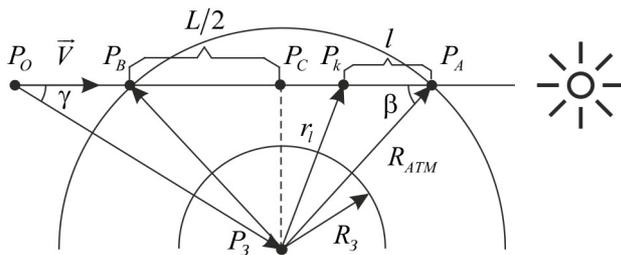


Рис. 3

Длину  $L$  найдем из  $\Delta P_3 P_O P_C$  как:

$$L = 2\sqrt{R_{\text{ATM}}^2 - (r \sin \gamma)^2} = 2\sqrt{R_{\text{ATM}}^2 + r^2 (\cos^2 \gamma - 1)},$$

где  $\cos \gamma = (\overline{P_O P_3}, \vec{V})/r$ ,  $\vec{V}$  – единичный вектор направления на Солнце, а  $r = |\overline{P_O P_3}|$ .

В силу симметрии сферы выражение (14) можно записать как:

$$\int_0^L \rho(h(l)) dl = 2 \int_0^{L/2} \rho(h(l)) dl. \quad (15)$$

В данной работе интеграл (15) вычисляется с помощью метода трапеций. Для этого отрезок  $P_A P_C$  равномерно разбивается на  $N$  узлов интегрирования с шагом  $\Delta l$ , и в каждом из элементарных отрезков применяется формула трапеции. Для выполнения в реальном времени, т.е. чтобы частота визуализации кадров была не ниже 25 кадров в секунду, число шагов  $N$  выбирается следующим образом:

$$N \leq t_{\text{осв.}}/t_{\text{шаг}},$$

где  $t_{\text{осв.}}$  – часть времени кадра (обычно не более 40мс), выделенная для расчета рассветного и закатного освещения,  $t_{\text{шаг}}$  – время одного шага интегрирования.

#### 5. Результаты

Предлагаемый в данной работе метод моделирования рассветного и закатного освещения реализован в программном модуле для системы визуализации космического видеотренажерного комплекса. Апробация метода проводилась с помощью виртуальной сцены, содержащей текстурированные трехмерные полигональные модели МКС (около 800 тыс. полигонов) и Земли (около 150 тыс. полигонов). Для расчета рассветного и закатного освещения было выбрано число шагов интегрирования  $N=800$ . Скорость визуализации сцены составила около 50 кадров/с при разрешении экрана 1280x1024 (на GeForce GTX 285).

#### Литература

1. М.В. Михайлюк, М.А. Торгашев. Система «GLVIEW» визуализации для моделирующих комплексов и систем виртуальной реальности // Вестник РАН, 2011. №2. С. 20-28.
2. П.Ю. Тимохин. Реализация вычисления суточного освещения Земли в космических тренажерах. – // XXXVIII Гагаринские чтения – М.: МАТИ, 2012, Т.2. – С. 120-122.
3. Ю.М. Тимофеев, А.В. Васильев. Теоретические основы атмосферной оптики. – СПб.: Наука, 2003.
4. W.M. Cornette, J.G. Shanks. Physical reasonable analytic expression for the single-scattering phase function. Applied Optics, v. 31, №16 (1992), pp.3152- 3160.
5. WCRP: A preliminary cloudless standard atmosphere for radiation computation. WCP-112, 1986, 60pp.

## Modelling of dawn and sunset lighting in space video simulators

P.Yu. Timokhin

**Abstract.** The paper presents a technique of dawn and sunset lighting modelling in space video simulators. The technique is based on physical modelling of sunlight spectrum changing, passing through the atmosphere, and enables synthesizing of space objects images with realistic dawn and sunset lighting. The paper describes issues of simulated lighting calculation accounting for real-time execution as well.

# Особенности работы полосковых линий связи КМОП микропроцессоров с переменной нагрузкой

В. А. Горячев

кандидат физико-математических наук

Для проектирования цепей синхронизации элементов высоко производительных КНИ КМОП микропроцессоров рассмотрены особенности работы микрополосковых линий связи (МПЛС). Дается представление о допустимой длине МПЛС с возможным числом несогласованных соединений в типовых блоках ИС (БИС) без дополнительного усиления цифровых импульсов.

## Введение

Слабым местом, ограничивающим производительность КНИ КМОП микропроцессоров и систем на кристалле, являются цепи синхронизации. Линии синхронизации нанотранзисторных СБИС имеют большую длину, число разветвлений и, как следствие, большие сопротивления и емкости. Кроме того, линии синхронизации, используемые в высокочастотных цифровых схемах, часто выполняются в виде микрополосковых линий связи (МПЛС) и требуют тщательного согласования с драйвером и нагрузкой в широком диапазоне частот используемых импульсов. Подобное согласование необходимо для ограничения доли энергии, рассеиваемой собственно в МПЛС. Поэтому повышение производительности микропроцессоров приводит к существенному росту рассеиваемой мощности в этих линиях. Иногда в цепях синхронизации современных цифровых схем рассеивается до 50% общей мощности конструкций [1].

К достоинствам МПЛС и различных устройств на их основе относятся: возможность автоматизации их производства с применением плёночной технологии, и, следовательно, низкая трудоемкость; повышенная надёжность и хорошая воспроизводимость характеристик; сравнительная простота изготовления отдельных устройств на МПЛС и возможность точного изготовления технологически сложных функциональных узлов; небольшие габариты и масса. Их недостатки – трудность согласования с различными элементами схемы и сложность измерения и настройки параметров.

Любопытно, что при снижении технологических размеров и напряжения питания, в общей величине мощности рассеиваемой полупроводниковым кристаллом увеличивается доля статической мощности. Так для технологии 0,13 мкм при напряжении питания 1,3 В доля статической мощности ~10%, для технологии 70 нм при напряжении питания ~1 В доля статической мощности около 50% от величины мощности рассеиваемой кристаллом. Для технологии 32 нм при  $U_{dd} \approx 0,65$  В доля статической мощности при стандартной САПР может оказаться > 80% общей мощности СБИС.

Данное обстоятельство обусловлено, по-видимому, проявлением в реальных субмикронных конструкциях с низкими технологическими нормами квантоворазмерных эффектов, в частности эффекта туннелирования, как в активных элементах, так и в межсоединениях [2].

По словам представителей IBM, 32-нм КНИ технология с разбросом критических размеров менее 1 нм и неровностью кромок 2 нм позволяет уменьшить размеры кристалла на 50% по сравнению с аналогом, произведенным с 45-нм разрешением. В  $45/32 = 1.4$  раза сокращается длина сторон и в  $1.4^2 \approx 2$  раза уменьшается площадь кристалла. При этом примерно на 45% снижается энергопотребление, но тепловые потери или рассеянная энергия заметно увеличиваются. В месте с тем до 30% вырастает производительность, а длина линий в «дереве» связей снижается на 30%, что несколько меньше, чем при пропорциональном снижении длины сторон чипа. Исследования в этой области проводит Технологический центр IBM в Олбани. В 2008 году представители AMD и IBM сообщили об успешном формировании топологии верхнего слоя металла на чипе размером 22x33 мм посредством экстремальной ультрафиолетовой литографии (EUV) с длиной волны излучения источника 13,5 нм. Данная 32-нм КНИ технология предназначена для формирования кристаллов с топологическими нормами 22 нм.

В представленной работе для упрощения схемотехнического проектирования высоко производительных КНИ КМОП микропроцессоров рассмотрены особенности работы медных микрополосковых линий связи, нагруженных на длинные проводники. Дается представление о допустимой длине МПЛС с возможным числом несогласованных соединений в типовых блоках ИС (БИС) без дополнительного усиления цифровых импульсов.

## 1. Режимы работы линий передачи с переменной нагрузкой.

В реальных условиях МПЛС всегда входят в состав СВЧ трактов и являются нерегулярными. Любое из соединений или изменение направления

представляет собой нерегулярность в МПЛС, является нагрузкой и приводит к появлению в линии, кроме основной волны бегущей к нагрузке, дополнительной волны, распространяющейся от конца или изгиба линии к источнику или генератору (отраженная или обратная волны), а также множества рассеиваемых волн высших типов.

С практической точки зрения интерес представляет учёт влияния нерегулярных элементов (нагрузок) на распространение волны основного (низшего) типа, т.к. реальные тракты проектируются, как правило, с учётом существования в них одномодового режима. При такой постановке задачи любую линию передачи можно заменить эквивалентной длиной линии, а нерегулярности – их эквивалентными сопротивлениями в виде сосредоточенных элементов и включений. Тогда можно использовать при анализе линий передачи конечной длины основные понятия теории длинных линий.

### 1.1. Основные соотношения.

В этом случае напряжению  $U$  и току  $I$  в линии можно поставить в соответствие электрическую и магнитную напряженности поля, а распределенным емкости и индуктивности – абсолютные диэлектрическую  $\varepsilon\varepsilon_0$  и магнитную  $\mu\mu_0$  проницаемости. Напряжение и ток в случае однородной линии без потерь в любом ее сечении  $z$  можно представить в виде суммы падающей  $U_{nao}(z)$  и отраженной  $U_{omp}(z)$  волн:

$$\begin{aligned} U &= U_{nao}(z) + U_{omp}(z) = U_{nao}^m e^{i\beta z} + U_{omp}^m e^{-i\beta z} \\ I &= I_{nao}(z) + I_{omp}(z) = \frac{1}{Z_B} (U_{nao}^m e^{i\beta z} - U_{omp}^m e^{-i\beta z}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\beta = 2\pi/\lambda_B$  – фазовая постоянная;  $\lambda_B$  – длина волны в линии;  $Z_B$  – волновое сопротивление.

Комплексная амплитуда падающей волны  $U_{nao}(z)$  определяется мощностью генератора. Отношение комплексных амплитуд напряжения отраженной и падающей волн в данном сечении линии  $z$  зависит от нагрузки и является коэффициентом отражения по напряжению:

$$\Gamma(z) = \frac{U_{omp}(z)}{U_{nao}(z)} = \frac{U_{omp}^m}{U_{nao}^m} e^{i2\beta z} = \Gamma_H e^{i2\beta z} \quad (2)$$

Здесь  $U^m$  – модуль напряжения волн, а комплексная величина

$$\Gamma_H = |\Gamma_H| e^{i\varphi_H} \quad (3)$$

- коэффициент отражения от нагрузки в сечении  $z = 0$ . С учётом выражения (2) напряжение и ток в линии можно представить в виде

$$U(z) = U_{nao}(z)[1 + \Gamma(z)],$$

$$I(z) = \frac{U_{nao}(z)}{Z_B} [1 - \Gamma(z)].$$

Волновое сопротивление  $Z(z)$  в сечении  $z$  линии, равно отношению комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$Z(z) = Z_B \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

или в нормированном (приведенном к волновому сопротивлению линии) виде:

$$Z^*(z) = \frac{Z(z)}{Z_B} = R^*(z) + iX^*(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}, \quad (4)$$

где  $R^*(z)$  и  $X^*(z)$  действительная и мнимая части приведенного сопротивления.

Из выражений (4) и (2) следует

$$\Gamma(0) = \frac{Z^*(0) - 1}{Z^*(0) + 1} = \frac{Z_H^* - 1}{Z_H^* + 1}. \quad (5)$$

Таким образом, в каждом сечении  $z$  существует простая и однозначная связь (4), (5) между параметрами  $\Gamma(z)$  и  $Z(z)$ , характеризующими существующий в линии режим.

На практике разработки стандартных СВЧ конструкций для определения коэффициента отражения  $\Gamma$  широко используется экспериментально определенное распределение амплитуды результирующего напряжения (или тока) вдоль линии. Амплитуда результирующего напряжения в сечении  $z$ , удаленном от нагрузки на расстояние  $z$ , равна модулю  $U^m(z)$  напряжения  $U(z)$ , который в линии без потерь определяется выражением

$$U^m(z) = U_{nao}^m \sqrt{1 + |\Gamma_H|^2 + 2|\Gamma_H| \cos(2\beta z - \varphi_H)}. \quad (6)$$

Зависимость распределения напряжения вдоль линии имеет периодический характер. Напряжение достигает минимума, равного  $1 - |\Gamma_H|$ , в точках, где

$$\cos(2\beta z_n - \varphi_H) = -1, \text{ при } 2\beta z_n = (2n + 1)\pi + \varphi_H,$$

и максимума, равного  $(1 + |\Gamma_H|)$ , когда

$$\cos(2\beta z'_n - \varphi_H) = 1, \text{ при } 2\beta z'_n = 2n\pi + \varphi_H,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – порядковый номер минимума или максимума, отсчитанного от нагрузки ( $z = 0$ ). Расстояние между соседними минимумами или максимумами одинаково и равно половине длины волны низшей моды в данной линии.

Отношение максимального и минимального значений амплитуды напряжения называется коэффициентом стоячей волны (КСВ или Кс), обратная величина – коэффициентом бегущей волны (КБВ):

$$\text{КСВ} = \frac{U_{\max}^m}{U_{\min}^m} = \frac{1 + |\Gamma_H|}{1 - |\Gamma_H|}, \quad \text{КБВ} = 1/\text{КСВ} = \frac{1 - |\Gamma_H|}{1 + |\Gamma_H|}.$$

Модуль коэффициента отражения от нагрузки

$$|\Gamma_H| = (\text{КСВ} - 1)/(\text{КСВ} + 1) = (1 - \text{КБВ})/(1 + \text{КБВ}),$$

а его аргумент можно найти из (6)  $\varphi_H = 2\beta z_1 - \pi$ , где  $z_1$  – координата ближайшего к нагрузке минимума.

Мощность  $P_H$ , поступающая в нагрузку, равна разности мощностей падающей  $P_{\text{пад}}$  и отраженной  $P_{\text{отр}}$  волн. Поскольку

$$P_{\text{пад}} = \frac{1}{2} \frac{|U_{\text{пад}}|^2}{Z_B}, \quad \text{а } P_{\text{отр}} = \frac{1}{2} \frac{|U_{\text{отр}}|^2}{Z_B} = \frac{1}{2} \frac{|U_{\text{пад}}|^2}{Z_B} |\Gamma|^2,$$

$$\text{то } P_H = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}} = P_{\text{пад}}(1 - |\Gamma|^2),$$

т.е. при рассогласовании уровень полезного сигнала в нагрузке снижается.

Типичные значения параметров для смешанного режима в высококачественных трактах СВЧ принято считать следующими:

$\text{КСВ}_{\text{MAX}}$	1.040	1.105	1.222
$\text{КБВ}_{\text{MIN}}$	0.9615	0.9050	0.8183
$ \Gamma _{\text{MAX}}$	0.02	0.05	0.10

При проектировании СВЧ трактов обычно стремятся достичь возможно лучшего согласования линий, т.е. приблизить КСВ к идеальной величине, равной единице, а  $|\Gamma|_{\text{MAX}}$  к нулю. Однако в соединениях многоуровневых интегральных схем, в том числе и высокопроизводительных микропроцессоров, такой возможности нет и могут встречаться МПЛС с большими коэффициентами отражения от нагрузки:  $|\Gamma|_{\text{MAX}} = 0.2, 0.4$  и более.

Иерархическая система межсоединений многослойных БИС с разными размерами линий в различных слоях металлизации позволяет уменьшить разброс временной задержки  $\tau_{RC}$  с учетом технологической длины локальных и глобальных соединений. При этом глобальные соединения могут

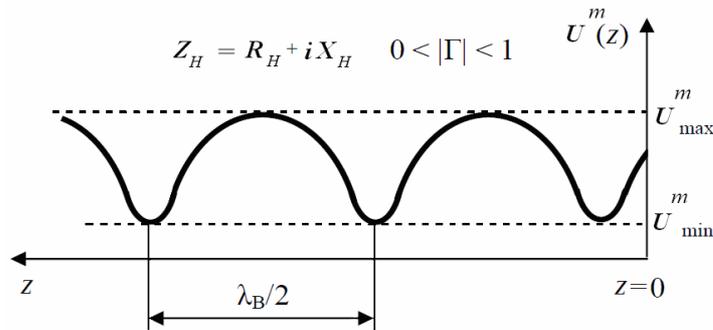


Рис. 1. Распределение амплитуды напряжений  $U^m(z)$  в смешанном режиме

Согласованная с линией нагрузка, сопротивление которой равно волновому сопротивлению линии, не создает отраженной волны и поглощает всю мощность падающей. Линия с согласованной нагрузкой ведет себя подобно бесконечной регулярной линии: в ней существует **режим бегущей волны**, характеризуемый параметрами  $Z(z)=1, |\Gamma|=0, \text{КСВ}=1, \text{КБВ}=1$ .

Если  $Z_H = iX_H$  (сопротивление нагрузки реактивно),  $Z_H = 0$  («короткое замыкание») или  $Z_H = \infty$  («холостой ход»), то величина  $|\Gamma|=1$ , т.е. нагрузка полностью отражает падающую волну. В линии с такой нагрузкой устанавливается **режим стоячей волны**, характеризуемый параметрами  $Z^*(z) = iX^*(z), |\Gamma|=1, \text{КСВ}=\infty, \text{КБВ}=0$ .

Режимы бегущей и стоячей волн являются предельными для реальных условий. В общем случае в линии образуется так называемый **смешанный режим**, для которого  $Z_H = R_H \pm iX_H, 0 < |\Gamma| < 1, 1 < \text{КСВ} < \infty, 1 > \text{КБВ} > 0$ . Распределение по координате  $z$  амплитуды напряжений  $U^m(z)$  в этом случае имеет вид представленный на рисунке 1.

быть примерно в 3.5 – 4 раза длиннее локальных с аналогичными значениями  $\tau_{RC}$ , что и для локальных слоев [3].

## 1.2. Затухания в линиях передач с резистивными потерями

При отсутствии отражения от нагрузки потеря в резистивной линии равна

$$D = 10 \cdot \lg(e^{2\alpha l}) = 20 \cdot \lg \alpha l = 20 \cdot (0.434) \alpha l,$$

где  $\alpha$  – постоянная затухания на единице длины;  $l$  – длина линии.

Подключение к линии несогласованной нагрузки приводит к увеличению затухания:

$$D = 10 \cdot \left( \lg e^{2\alpha l} + \lg \frac{1 - |\Gamma|^2 e^{-4\alpha l}}{1 - |\Gamma|^2} \right).$$

Оценим количество  $N$  несогласованных нерегулярностей в линиях, допустимых в пределах потерь  $\sim 1$  дБ.

### 1.2.1. Параметры затухания в короткой линии ( $4al \ll 1$ )

$$D = 8.68 \cdot \alpha l + 4.34 \cdot 4\alpha l \frac{|\Gamma|^2}{1-|\Gamma|^2} = 8.68 \cdot \alpha l \left( 1 + 2 \frac{|\Gamma|^2}{1-|\Gamma|^2} \right)$$

Таблица 1. Параметры затухания в короткой линии с длиной  $l = 1$  мм

$ \Gamma _{\max}$	0.02	0.05	0.10	0.20	0.40
$(1 -  \Gamma _{\max}^2)$	0.9996	0.9975	0.9900	0.9600	0.8400
$\left( 1 + 2 \frac{ \Gamma _{\max}^2}{1 -  \Gamma _{\max}^2} \right)$	1.00080	1.00501	1.02020	1.08333	1.38095
N	~1500	~200	~20	~5	~1

### 1.2.2. Параметры затухания в длинной линии $al > 1$ ( $4al \gg 1$ )

$$D = 10 \cdot (0,868 \cdot \alpha l - \lg(1 - |\Gamma|_{\max}^2))$$

Таблица 2.

Параметры затухания в длинной линии с вариацией проводимости проводников  $\pm 0.5$  дБ/мм

$ \Gamma _{\max}$	0.02	0.05	0.10	0.20	0.40
$(1 -  \Gamma _{\max}^2)$	0.9996	0.9975	0.9900	0.9600	0.8400
$-\lg(1 -  \Gamma _{\max}^2)$	0.000173	0.001087	0.004365	0.017729	0.075721
N/мм	~6000	~1000	~200	~50	~10

Затухание, вызванное конечной проводимостью (омическим сопротивлением) проводников МПЛС, обычно составляет 1–2 дБ/мм ( $1.5 \pm 0.5$  дБ/мм). Уровень потерь в линиях передач современных кремниевых ИС с медной металлизацией на порядок меньше – не более 0.15 дБ/мм на частоте 20 ГГц [4].

Таким образом, сравнивая численные значения N допустимых несогласованных соединений в различных линиях, представленные в таблицах 1 и 2 при уровнях потерь в линиях кремниевых кристаллов, можно заключить, что локальные линии более критичны к числу нерегулярностей проводников. При 10% величине коэффициента отражения  $|\Gamma|_{\max}$  допустимое количество несогласованных нагрузок в длинной (глобальной) линии порядка 200 на каждый миллиметр линии, а в короткой – около 20 на каждую локальную линию с длиной 1 мм.

## Заключение

В заключение следует отметить, что помимо затухания в линиях согласование может оказывать заметное влияние на деградиационные характеристики соединений, а также играть важную роль в нормальной работе активных элементов – источников СВЧ колебаний.

При рассогласованной нагрузке в линии может снижаться электрическая прочность линии и возникать «пробой» изоляции, когда напряженность поля в максимуме стоячей волны становится равной пробивной напряженности разделительного диэлектрика, или  $|E|_{\max}^m = E_{\text{проб}}$ . Так как напряжение в максимуме превышает напряжение падающей волны в  $(1 + |\Gamma|)$  раз, то мощность, при которой возникает пробой, равна

$$P_{\text{проб}} = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{проб}}^2}{Z_B} \frac{(1 - |\Gamma|)}{(1 + |\Gamma|)} = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{проб}}^2}{Z_B} \text{КВВ.}$$

Эта мощность максимальна при КСВ = 1 и снижается в КСВ раз при рассогласованной нагрузке.

При изменении сопротивления нагрузки источников сигналов (генераторов) в большинстве случаев наблюдаются изменения, как мощности, так и частоты генерируемых колебаний – так называемое «затягивание» частоты. Чем лучше согласован СВЧ тракт, тем выше стабильность частоты генератора.

Кроме рассмотренных, существуют и другие характеристики конструкции БИС, которыми может в перспективе обеспечиваться режим согласования и

улучшения частотных, шумовых и деградационных параметров линий связи. В частности использование одноуровневой структуры сверхпроводящих графеновых соединений [5] и вертикальных углеродных нанотрубок в многоуровневых 3D комбинированных ИС, типа академических ПЛИС с архитектурой Island-style, где в качестве массива конфигурационной памяти используются блоки памяти на нанотрубках [6]. Подобная структура межсоединений используется в ПЛИС Stratix, Cyclon и др. фирмы Altera. В конечном счете, качество БИС во многом определяется именно тем, насколько тщательно и аккуратно спроектирована структура межсоединений.

## Литература

1. А.И. Белоус, И.А. Мурашко, В.С. Сякерский. Методы минимизации энергопотребления при проектировании КМОП БИС. // *Технология и*

*конструирование в электронной аппаратуре* – №2, 2008. С. 39 – 44.

2. В.И. Шашкин, Н.В. Востоков. Решение задачи инжекции носителей тока в изолирующий слой при самосогласованных граничных условиях на контактах // *ФТП*, – Т. 42, №11, 2008. С. 1339 – 1344.

3. В. Цветов. Развитие классической микроэлектроники. Ожидаемые физико-технические пределы. // *Электроника НТБ* – №3, 2010. С. 2 – 6. <http://www.electronics.ru/issue/2010/3/2/>

4. М.А. Усикова, В.В. Лучинин. Методы препарирования интегральных микросхем для топологического анализа // *Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ»* – №1, 2009. С. 13 – 20.

5. В.А. Горячев. Физические особенности графеновых соединений для нанотранзисторных СБИС // *УСР* – №3, 2011. С. 17 – 23.

6. А. Строганов, М. Мотылев, С. Цыбин и др. ПЛИС в ПЛИС, или Как спроектировать самому // *Компоненты и технологии*. – №4, 2011. С. 88 – 93.

## Singularities of operation strip-type transmission lines for CMOS microprocessors with variable loading

V.A. Goryachev

**Abstract.** Singularities of operation for designing micro strip transmission lines (MSTL) synchronization of elements high-efficiency SOI CMOS microprocessors are considered. Representation about admissible length MSTL with possible number of mismatched connections in typical units the integrated circuit (IC) without additional gain of numeral pulses is given.

# Моделирование 3D-температурных полей электронных систем: программный комплекс STF-ElectronMod

П.И. Кандалов, А.Г. Мадера<sup>1</sup>

<sup>1</sup> – доктор технических наук, профессор

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-07-00076-а

Рассматривается программный комплекс STF-ElectronMod, предназначенный для моделирования трехмерных температурных полей электронных систем. Методы и модели, положенные в основу программного комплекса, позволяют осуществлять тепловое проектирование электронных модулей с учетом реальных особенностей конструкции модуля и монтажа элементов на печатной плате.

При разработке современных электронных систем различного назначения (интегральных микросхем (МС), управляющих систем, вычислительных комплексов и суперкомпьютеров) зачастую возникает проблема охлаждения и отвода тепла от тепловыделяющих элементов, входящих в состав электронной системы. Проблема эффективного отвода тепла обуславливается, во первых, значительной зависимостью электрических, механических и надежностных характеристик электронных элементов и самой системы от температуры, которая приводит к существенному их изменению в процессе эксплуатации. Причем температурные изменения характеристик системы могут выходить за допустимые пределы, обуславливая неправильное срабатывание и функционирование системы, снижение ее надежности, уменьшение быстродействия и помехоустойчивости, а также возникновение термомеханических напряжений и деформаций. Во-вторых, проблема эффективного теплоотвода становится все более актуальной в связи с неуклонной микро-, а в настоящее время – и наноминиатюризацией элементов электронных систем, сопровождающихся увеличением плотности мощности тепловыделения в единице объема и, как следствие, повышением уровней температуры. Более того, проблема охлаждения и отвода тепла зачастую является решающим ограничивающим фактором на пути создания конкурентоспособных электронных и надежных электронных систем.

Тепловое проектирование электронных систем и ее элементов, должно осуществляться наряду с другими видами проектирования – логическим и схмотехническим проектированием системы, оптимальной трассировкой сигнальных проводников в многослойных печатных платах (МПП), моделированием высокочастотных эффектов в линиях связи, проектированием конструкции и топологии МС и МПП. Поскольку температурные поля, возникающие в электронной системе в процессе ее функционирования, оказывают значительное влияние практически на все ее характеристики, то тепловое проектирование должно проводиться на начальном этапе совместно с проработкой топологии и логической структуры системы, в итерационном режиме с решением остальных задач проектирования.

Основными задачами теплового проектирования электронных систем являются:

- моделирование температурных полей в объемах и на поверхностях конструкции электронной системы и ее элементов (на кристаллах и корпусах МС и электро-радиоэлементах (ЭРЭ)),
- моделирование тепловых режимов элементов системы и всей системы в целом в условиях испытаний и эксплуатации,
- моделирование распределений тепловых потоков в системе,
- моделирование конвективного теплообмена между элементами системы и средой как внутри, так и вне ее,
- расчеты аэродинамических характеристик движения воздушной среды в системе.
- конструкторско-технологическое обеспечение параметров тепловых режимов элементов и системы в заданных диапазонах температуры окружающей среды и других параметров внешних воздействий.

Важнейшей структурной единицей электронной системы является электронный модуль (ЭМ). Он представляет собой конструкцию, содержащую МПП, установленные на ней МС и ЭРЭ (дискретные диоды, транзисторы, резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, электрическими разъемы, и другие навесные элементы), а также конструктивные элементы креплений, направляющих и пр. (рис. 1).

Для осуществления адекватного теплового проектирования ЭМ необходимо учитывать такие конструктивные особенности, как: сложный трехмерный характер конструкции ЭМ; многослойность МПП, содержащей большое количество разнородных слоев различной толщины; неоднородные включения и полости; пространственное размещение МС и ЭРЭ на поверхностях МПП. Кроме того, необходимо проводить моделирование теплопереноса через выводы корпусов МС и ЭРЭ и зазоры между МС, ЭРЭ и МПП; сложной динамики рассеиваемой мощности в МС; взаимодействие и взаимовлияние МС и ЭРЭ друг на друга.

Перечисленные особенности ЭМ – пространственный характер конструкции, большое разнообразие и число разнородных в теплофизическом отношении

элементов, имеющих трехмерную конфигурацию, сложность протекающих в ЭМ процессов теплопереноса и теплообмена со средой, описываемых нетривиальными математическими моделями, – обуславливает тот факт, что в настоящее время отсутствуют надежные, эффективные и адекватные методы математического и компьютерного моделирования трехмерных температурных полей ЭМ.

Необходимо отметить, что на рынке программных комплексов (ПК), предназначенных для моделирования распределений температуры в электронных системах, и, в частности конструкций ЭМ, имеется достаточное количество как зарубежных, так и отечественных ПК. Однако все они обладают серьезными недостатками и не позволяют моделировать температурные поля ЭМ с учетом всех конструктивных и физических особенностей. Это существенно ограничивает их использование в профессиональной практике теплового

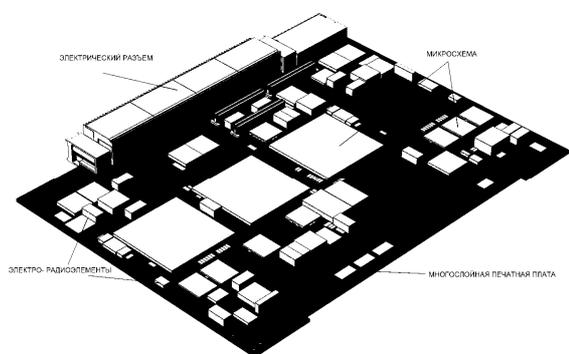


Рис. 1 Конструкция электронного модуля

проектирования. Кроме того, существующие ПК теплового проектирования (как отечественные, так и зарубежные) как правило обладая высокой универсальностью, в то же время не позволяют учитывать индивидуальные особенности конструкций ЭМ, которые оказывают значительное влияние на температурные поля. Так, распространенный за рубежом ПК теплового проектирования электронных систем BETA Soft не учитывает многослойность конструкций МПП, число слоев в которых может достигать нескольких десятков, а разброс теплопроводностей и толщин слоев – четырех порядков. В то же время влияние толщины и теплопроводности слоев на распределение температуры на поверхности и в объеме МПП и в установленных на ней элементах, является довольно значительным. Другим важным фактором, сдерживающим применение коммерческих ПК в реальной практике проектирования, является тот факт, что разработчикам обычно не известны модели и методы, заложенные в конкретный ПК, а следовательно, не известны и границы применимости, а также степень адекватности получаемых результатов.

В данной статье рассматривается разработанный авторами ПК STF-ElectronMod, предназначенный для проведения теплового проектирования ЭМ, заключающегося в моделировании трехмерных температурных полей ЭМ с учетом всех перечисленных выше физических и конструктивных особенностей ЭМ. В основе ПК лежит авторский матрично-топологический

метод математического моделирования и его компьютерная реализация, который позволяет проводить расчеты трехмерных температурных полей сложных конструкций ЭМ с учетом реальных конструктивных особенностей, реальных условий монтажа МС и ЭРЭ на поверхностях МПП, включая возможность моделирования при практически неограниченном количестве разнородных слоев в структуре МПП.

ПК STF-ElectronMod реализован на языке Pascal для персональных и супер-компьютеров, имеет удобный пользовательский интерфейс с развитой пользовательской оболочкой, обеспечен средствами визуализации распределений температуры ЭМ в виде цветных и черно-белых изотерм. Разработанный ПК теплового проектирования ЭМ (ПК STF-ElectronMod) по своим реальным возможностям превосходит существующие ПК.

В качестве примера применения разработанного ПК STF-ElectronMod приведены результаты моделирования температурных полей ЭМ, содержащего МПП, состоящей из 27 разнородных слоев, выполненных из меди и полиимида, и установленных на поверхностях МПП 20-ти МС и 4-х конструктивных элементов крепления ЭМ к корпусу электронной системы (рис 2). В

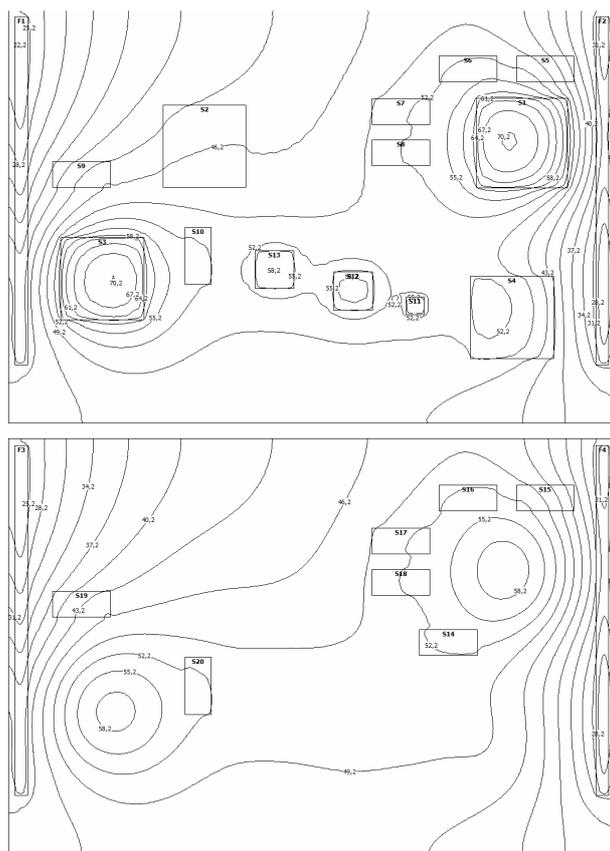


Рис. 2. Результаты расчета температурного поля верхней и нижней поверхностях ЭМ

рассматриваемой конструкции мощности потребляемые МС распределены в диапазоне от 0,17 до 5,5 Вт; четыре наиболее мощные МС (S1, S2, S3, S4) выполнены конструктивно в корпусах типа CPGA с 602 матричными выводами и CQFP – с 240 планарными выводами.

Задание исходных данных для моделирования температурных полей ЭМ в ПК STF-ElectronMod осуществляется в специально разработанных диалоговых окнах, в которых задаются:

- общие параметры конструкции ЭМ, такие как температуры среды, условия теплообмена и геометрические размеры конструкции МПП по осям X, Y, и Z;

- параметры слоев МПП (толщина, теплопроводность, последовательность расположения слоев);

- топология размещения МС и ЭРЭ на поверхностях МПП;

- параметры конструкции корпусов МС и ЭРЭ, потребляемые мощности, количество выводов в каждом корпусе и их расположение по его конструкции, материалы выводов, толщины зазоров между МС, ЭРЭ и МПП;

- конструктивные и теплофизические параметры конструкций элементов, играющих роль стоков.

Результаты, приведенные на рис. 2, показывают, что наибольшие значения температуры, как и следовало ожидать, наблюдаются в местах расположения двух наиболее мощных МС (S1 и S3), расположенных с двух сторон МПП. При этом наименьшие значения температуры находятся в местах размещения элементов крепления ЭМ к корпусу электронной системы. Характер полей температуры показывает их довольно сильную диссипацию от мест расположения наиболее

мощных МС, к периферии МПП, захватывая близлежащие элементы и, тем самым, оказывая на них тепловое влияние, которое может привести к нежелательным перегревам. Диссипация тепловых потоков по конструкции ЭМ зависит в основном от количества и толщины медных слоев, входящих в структуру МПП. Поэтому при оптимальном размещении МС и ЭРЭ на поверхности МПП следует наиболее чувствительные к температуре элементы располагать на расстояниях превышающих зоны влияния наиболее мощных МС и ЭРЭ. При этом значения зон влияния для конкретной конструкции ЭМ могут быть эффективно и адекватно рассчитаны посредством ПК STF-ElectronMod.

Разработанный ПК STF-ElectronMod с успехом применяется для теплового проектирования реальных сложных конструкций ЭМ. Особенностью ПК STF-ElectronMod является наличие графического редактора, позволяющего как количественно, так и визуально оценивать и выявлять места наибольшего нагрева конструкции и элементов ЭМ.

Практика применения разработанного ПК STF-ElectronMod и положенные в его основу модели и методы, позволяют сделать вывод о высокой степени адекватности моделей и методов, положенных в основу ПК (не хуже 5 – 6%), при условии задания исходных данных с той же или меньшей точностью.

## **Simulation of 3D-temperature fields of electronic systems: software package STF-ElectronMod**

**P.I. Kandalov, A.G. Madera**

**Abstract.** Software package STF-ElectronMod for simulate 3-D-temperature fields of electronic systems is considered. Methods and models underlying of software system, allow to do thermal design of electronic modules, taking into account the real features of the module design and assembly of components on a printed circuit board.

# Пороговые характеристики КНИ КМОП нанотранзисторов с высокой диэлектрической проницаемостью подзатворного диэлектрика

Н.В. Масальский

кандидат физико-математических наук

На основе численных решений уравнения Пуассона анализируются пороговые характеристики двух затворных КНИ КМОП нанотранзисторов без перекрытия областей затвора и стока/истока для случая применения в качестве подзатворного диэлектрика фронтального затвора материалов с высоким значением диэлектрической проницаемости. Основное внимание уделяется управлению пороговым напряжением при помощи ряда технологических параметров. Нелинейный характер полученных зависимостей обусловлен экспоненциальным ростом объемного заряда как функции потенциала в рабочей области транзистора. Использование материалов с высоким значением диэлектрической проницаемости приводит к усилению коротко-канальных эффектов. Технологические параметры, формирующие области перекрытия, наряду с толщинами транзисторной структуры могут эффективно управлять пороговым напряжением. Получены предварительные оценки перспективности перехода на германиевые транзисторные структуры.

## Введение

Переход на новые технологические нормы сопровождается постоянным уменьшением характерных размеров КМОП транзисторов – таких, как длина и ширина затвора, толщина подзатворного окисла и др. Наиболее критичным параметром является толщина подзатворного окисла, масштабировать которую в настоящее время довольно затруднительно в силу ряда физических ограничений, в частности токов утечки [1]. Это подвигает на применение материалов с высокой диэлектрической проницаемостью в качестве подзатворного окисла. Применение таких материалов приводит к изменению

фронтального затвора используются материалы с высоким значением диэлектрической проницаемости, на основе численных решений уравнения Пуассона. В своих исследованиях мы опираемся на три реперные точки, которые соответствуют диэлектрическим проницаемостям таких материалов как оксид кремния  $\text{SiO}_2$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 3.9\epsilon_0$ , где  $\epsilon_0$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость, оксид алюминия  $\text{Al}_2\text{O}_3$  с  $\epsilon = 9\epsilon_0$  и оксид гафния  $\text{HfO}_2$  с  $\epsilon = 25\epsilon_0$ .

Рассматриваемый тип транзисторов, (функциональная схема приведена на рис. 1), как

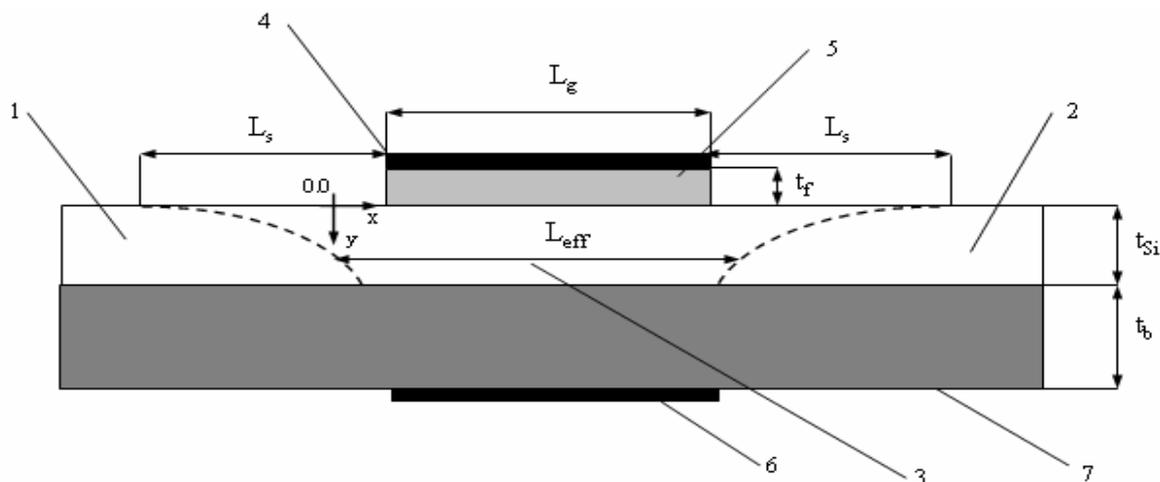


Рис. 1. Схема двух затворного КНИ транзистора с архитектурой без перекрытия, где 1 – область стока, 2 – область истока, 3 - рабочая область, 4 – фронтальный затвор, 5 – фронтальный подзатворный окисел, 6 - обратный затвор, 7 - погруженный окисел. Пунктирными линиями показаны профили концентрации легирования стока/истока

характеристик транзисторов, в частности такой важной характеристики как пороговое напряжение [2].

В настоящей работе обсуждаются пороговые характеристики двухзатворных нанотранзисторов КНИ КМОП с архитектурой «без перекрытия» [2, 3], в которых в качестве подзатворного диэлектрика

известно, характеризуется эффективным подавлением коротко-канальных эффектов (ККЭ), низким значением емкости и возможностью регулировки порогового напряжения, а также представляет практический интерес с позиции создания

низковольтных СБИС с малой потребляемой мощностью [3, 4].

Как показано в [5] в анализируемой архитектуре существует определенная специфическая связь между проявлением ККЭ и ограниченным набором технологических параметров. К нему относятся следующие элементы:  $L_g$  – длина затвора,  $t_{Si}$  – толщина пленки кремния (рабочей области),  $t_f$  – толщина окисла фронтального затвора,  $L_s$  – длина зазора,  $g$  – градиент легирования областей стока/истока,  $N_{SD}^{pick}$  – максимальная концентрация легирования областей стока/истока. Эффективное управление пороговым напряжением ( $U_{th}$ ) осуществляется при помощи изменения потенциала на обратном затворе транзистора ( $U_b$ ) [4]. Зависимость  $U_{th}$  от  $U_b$  в области регулировки имеет линейный характер и аппроксимируется выражением  $U_{th}^{(n,p)}(U_b) = U_{th}^{(n,p)}(0) - \gamma_{SOI} U_b$ , где  $U_{th}^{(n,p)}(0)$  – пороговое напряжение при нулевом уровне смещения  $U_b$ ,  $\gamma_{SOI}$  – безразмерный коэффициент, свойства которого подробно обсуждаются в [6].

## 1. Модель

Рассмотрим квазиклассическую задачу (в диффузионно-дрейфовом приближении (ДДП)) нахождения равновесного распределения потенциала в рассматриваемой КНИ структуре. Отметим, что возможность использования приближения ДДП, означает также и выбор начала отсчета потенциала  $\varphi$ . В общем случае необходимо решать самосогласованную задачу, связанную с нахождением распределения потенциала 2D потенциала рабочей области  $\varphi(x, y)$ , где оси  $x$  и  $y$  выбраны в соответствии с рис 1. Оно будет влиять и на распределение зарядов в рабочей области транзистора. 2D уравнение Пуассона в кремневой пленки рабочей области рассматриваемой структуры имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} = \\ = \frac{q}{\epsilon_{Si}} \left( N_A - N_{SD}^{pick} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} - N_{SD}^{pick} e^{-\left(\frac{L_g(1+2\eta)-x^2}{\sigma^2}\right)} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q$  – заряд электрона,  $\epsilon_{Si}$  – диэлектрическая проницаемость кремния,  $N_A$  – концентрация легирования рабочей области,  $\sigma = \sqrt{2\eta L_g g \frac{1}{\ln 10}}$  – параметр, определяющий крутизну гауссова профиля примеси в областях стока и истока вдоль оси  $x$ ,  $\eta$  – масштабный фактор, характеризующий отношение длин зазора и затвора. Граничные условия для решения уравнения Пуассона представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) |_{y=-t_f} &= U_f - U_{Fb}^f \\ \varphi(x, y) |_{y=t_b+t_{Si}} &= U_b - U_{Fb}^b \\ \varphi(x, y) |_{x=0} &= U_{bi} \\ \varphi(x, y) |_{x=L_{eff}} &= U_{bi} + U_{ds} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U_f$  – напряжение на фронтальном затворе,  $U_{Fb}^f$  и  $U_{Fb}^b$  – напряжение плоских зон для фронтального и обратного затворов соответственно,  $U_{bi}$  – встроенная разность потенциалов,  $L_{eff}$  – эффективная длина канала,  $U_{ds}$  – напряжение сток-исток. Необходимо отметить, что последнее условие применимо при  $x=L_{eff}$ , а не при  $L_g$  как это реализуется для транзисторов с крутым (близкому к вертикальному) профилем областей сток-исток.

Поскольку уравнение Пуассона является уравнением второго порядка, его решение будет содержать две константы, определяемые значением поля и потенциала  $\varphi_{sf}$  на фронтальной поверхности полупроводника. Значения поверхностных потенциалов  $\varphi_{sf}$  и  $\varphi_{sb}$  можно связать с падением напряжения на фронтальном и обратном затворах  $U_f$  и  $U_b$ . Для того, чтобы система уравнений (1)-(2) была замкнутой, ее необходимо дополнить связью полей на границах раздела полупроводник – диэлектрик. Для простоты ограничимся рассмотрением идеализированных состояний поверхностей, на которых отсутствуют сторонние заряды. Поскольку в дальнейшем мы будем интересоваться лишь пороговыми значениями напряжений, то поверхностной плотностью инверсионных зарядов также будем пренебрегать. Тогда связь между напряженностями полей можно получить из условия непрерывности нормальной составляющей вектора электрического смещения. Уравнения, связывающие падения напряжений на затворах со значениями потенциалов и полей на фронтальной и обратной поверхностях примут вид:

$$\begin{cases} U_f = \varphi_{sf} + U_{Fb}^f - \frac{\epsilon_{Si}}{k\epsilon_0} t_f \varphi'_{sf} \\ U_b = \varphi_{sb} + U_{Fb}^b + \frac{\epsilon_{Si}}{\epsilon_{SiO_2}} t_b \varphi'_{sb} \end{cases} \quad (3)$$

Данные уравнения содержат четыре неизвестных величины. Поверхностные потенциалы  $\varphi_{sf}$  и  $\varphi_{sb}$ , а также значения производных потенциала на фронтальной и обратной поверхностях, связь между которыми находится из решения уравнения Пуассона. Таким образом, уравнение Пуассона и система граничных условий полностью определяют электростатическую задачу.

Пороговое напряжение  $U_{th}$  определим как затворное напряжение при котором минимальная индуцированная плотность инверсионных зарядов достигает значения заряда  $Q_{th}$  адекватного (равного)

для обеспечения проводимости (генерации канала) [6], которое аппроксимируется выражением

$$Q_{th} = \int_0^{t_{Si}} n_i e^{q\varphi_{min}(y)/kT} dy, \quad (4)$$

где  $n_i$  – индуцированная плотность носителей в канале,  $\varphi_{min}$  – минимум канального потенциала.

Следует отметить, что соотношению (4) эквивалентно токовому методу, который применяется для экстракции порогового напряжения из результатов измерений. И в приведенных допущениях с учетом использования материалов с высокой диэлектрической проницаемостью пороговое напряжение для транзисторов с архитектурой «без перекрытия» можно представить в виде двух составляющих длинно-канальной и коротко-канальной компонент [2].

Отметим общие следствия, вытекающие из анализа численных решений предложенной модели.

Следствие 1. Оценка предельного диапазона пороговых напряжений. Соответствующий интервал описывается следующим выражением:

$$\Delta U_{th} = \frac{\epsilon_{Si} t_f 2\Phi_F}{k\epsilon_o t_{Si}}, \quad (5)$$

где  $\Phi_F$  – значение уровня Ферми.

Как следует из (5) при повышении диэлектрической проницаемости окисла фронтального затвора величина предельного диапазона обратно пропорционально снижается. На рис. 2 представлена зависимость  $\Delta U_{th}$  (нормированная относительно уровня Ферми) от значения  $k$  при различных значениях толщины рабочей области  $t_{Si}$  и толщины окисла фронтального затвора  $t_f$ .

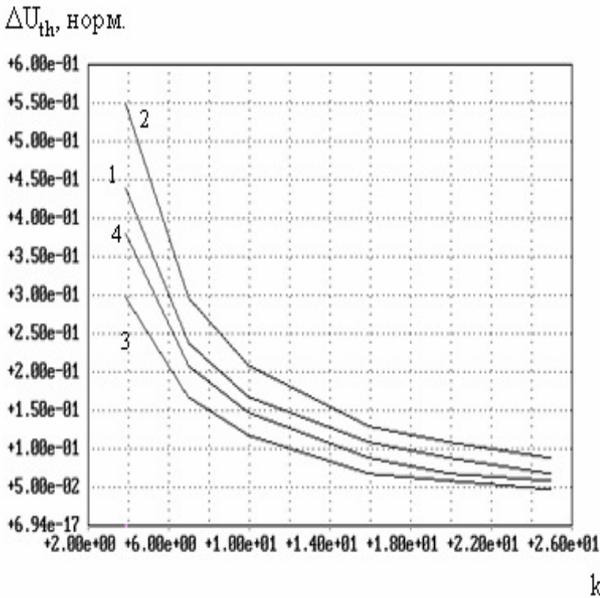


Рис.2 Зависимость  $\Delta U_{th}$  от  $k$ , где

1 -  $t_{Si}=5.5$  нм,  $t_f=0.8$  нм, 2 -  $t_{Si}=5.5$  нм,  $t_f=1.0$  нм, 3 -  $t_{Si}=8.0$  нм,  $t_f=0.8$  нм, 4 -  $t_{Si}=8.0$  нм,  $t_f=1.0$  нм

Из рис. 2 видно, что наибольшая величина  $\Delta U_{th}$  при прочих равных условиях определяется наименьшим значением  $t_{Si}$ . Таким образом, при переходе к новым технологическим нормам и

использовании материалов с высоким  $k$  предельные возможности регулировки порогового напряжения транзисторов КНИ будут неуклонно снижаться. Поскольку в значительной степени определяющим фактором является величина диэлектрической проницаемости.

Следствие 2. Оценка области изменения  $\Delta U_b$  затворных напряжений на обратном затворе для регулировки порогового напряжения. Соответствующее выражение для  $\Delta U_b$  имеет вид:

$$\Delta U_b = (1 + \frac{\epsilon_{Si} t_b}{\epsilon_{SiO_2} t_{Si}}) 2\Phi_F. \quad (6)$$

Зависимости нормированного  $\Delta U_b$  для аналогичных условий приведены на рис. 3.

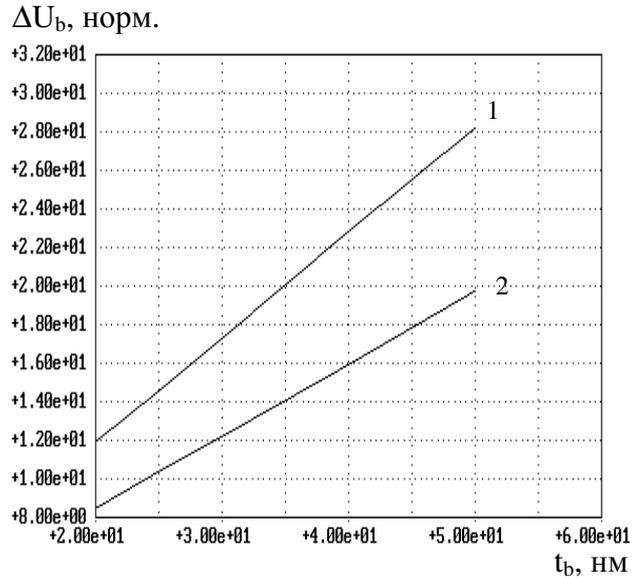


Рис. 3 Зависимости  $\Delta U_b$  от  $t_b$  для различных значений  $t_{Si}$ , где 1 -  $t_{Si} = 5.5$  нм, 2 -  $t_{Si} = 8$  нм

Таким образом, наименьший интервал затворных напряжений  $\Delta U_b$ , при которых достигается заданное значение  $\Delta U_{th}$ , определяется наименьшим значением толщины диэлектрического слоя обратного затвора  $t_b$ , а не толщиной рабочей области  $t_{Si}$ , как в предыдущем случае.

Следовательно, реализация возможности регулировки пороговых напряжений связана с созданием диэлектрических слоев обратного затвора с толщинами, сравнимыми с толщинами рабочей области полупроводника при этом применение материалов с высоким значением диэлектрической проницаемости приводит к резкому ограничению этих возможностей.

## 2. Результаты моделирования

Результаты моделирования для прототипа транзистора n-типа с длиной затвора 22 нм, толщиной рабочей области 10 нм, толщинами подзатворного и погруженного окислов 1.2 нм и 50 нм, приведенные на рис. 4-7, иллюстрируют зависимость  $U_{th}$  от различных значений  $\eta$ ,  $g$  и  $\epsilon$ .

Представленные данные позволяют оценить диапазон изменения порогового напряжения при переходе к более крутым профилям легирования стока/истока и более высоким значениям диэлектрической проницаемости фронтального подзатворного окисла в соответствии с общепринятым критерием проявления ККЭ критическое значение изменения порогового напряжения  $\Delta U_{th}^{cr} = \pm 100$  мВ. В таблице 1 для трех значений  $g$  и двух значений  $\epsilon$  приведены значения  $U_{th}$  при  $\eta=1$  и  $\eta_{min}$ , который соответствует условию  $U_{th}(\eta=1) - U_{th}(\eta_{min}) = 100$  мВ.

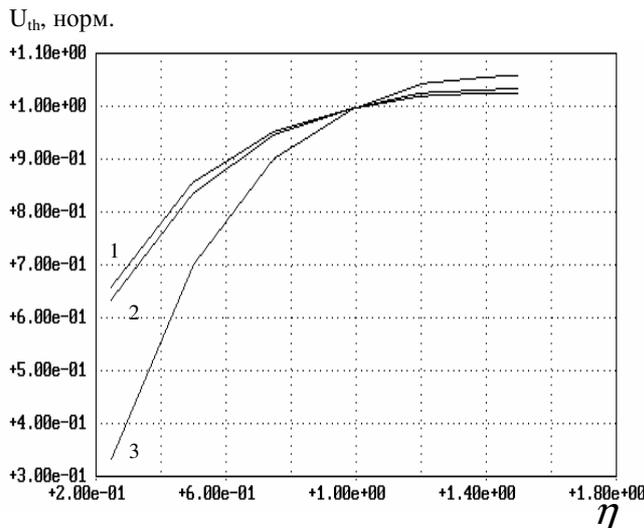


Рис. 4. Зависимость порогового напряжения  $U_{th}$  от  $\eta$  при  $g=3$  нм/дек и диэлектрической проницаемости подзатворного диэлектрика фронтального затвора  $\epsilon = k\epsilon_0$ , где кривая 1 -  $k=3.9$ , 2 -  $k=9$ , 3 -  $k=25$

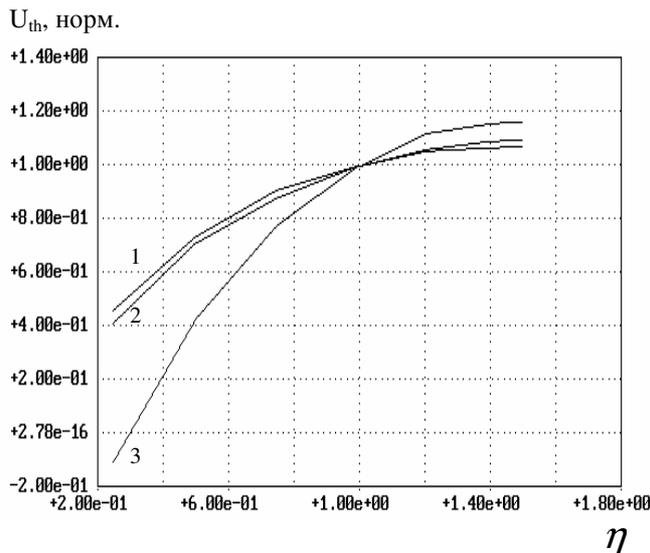


Рис. 5. Зависимость порогового напряжения  $U_{th}$  от  $\eta$  при  $g=5$  нм/дек и диэлектрической проницаемости подзатворного диэлектрика фронтального затвора  $\epsilon = k\epsilon_0$ , где кривая 1 -  $k=3.9$ , 2 -  $k=9$ , 3 -  $k=25$

Из приведенных данных следует, что самый узкий диапазон по  $\eta$  соответствует значениям  $g=5$  нм/дек и  $U_{th}$ , норм.

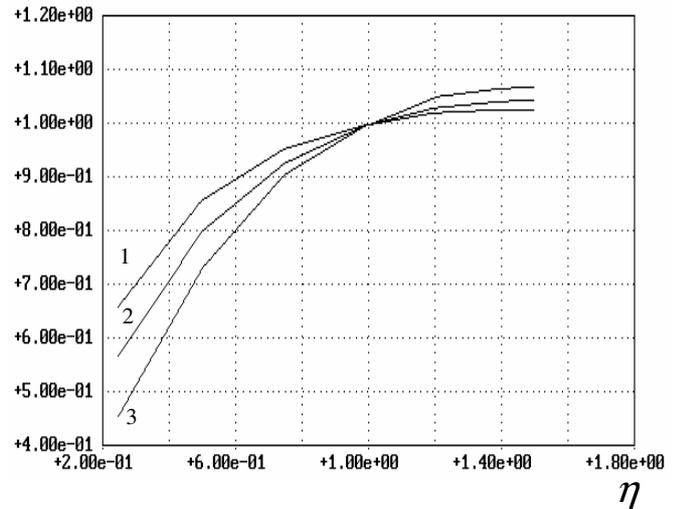


Рис. 6. Зависимость порогового напряжения  $U_{th}$  от  $\eta$  для подзатворного диэлектрика фронтального затвора  $\epsilon = 3.9\epsilon_0$ , где кривая 1 -  $g=3$  нм/дек, 2 -  $g=4$  нм/дек, 3 -  $g=5$  нм/дек

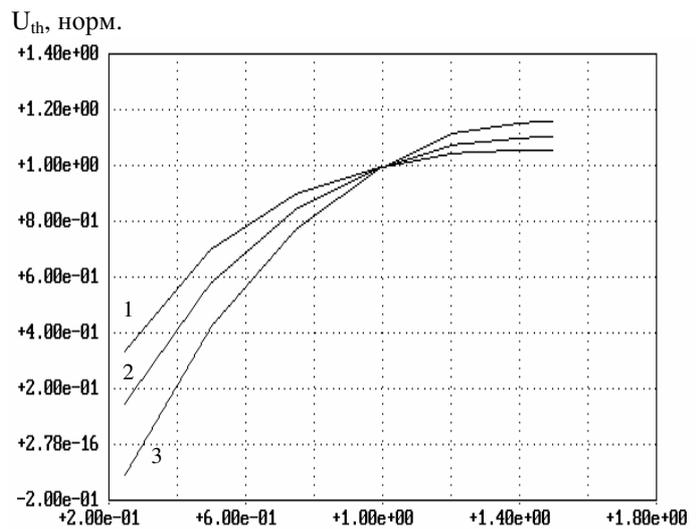


Рис. 7. Зависимость порогового напряжения  $U_{th}$  от  $\eta$  для диэлектрической проницаемости подзатворного диэлектрика фронтального затвора  $\epsilon = 25\epsilon_0$ , где кривая 1 -  $g=3$  нм/дек, 2 -  $g=4$  нм/дек, 3 -  $g=5$  нм/дек

Таблица 1. Пороговые характеристики для разных подзатворных материалов

g, нм/дек	$\epsilon$			
	$3.9\epsilon_0$		$25\epsilon_0$	
	$U_{th}$ , мВ	$\eta_{min}$	$U_{th}$ , мВ	$\eta_{min}$
3	375	0.35	346	0.5
4	365	0.43	328	0.6
5	353	0.5	300	0.66

$\epsilon = 25\epsilon_0$ , самый протяженный при  $g=3$  нм/дек и  $\epsilon = 3.9\epsilon_0$ .

В общем случае с ростом диэлектрической проницаемости диэлектрика фронтального затвора  $\epsilon$  пороговое напряжение  $U_{th}$  снижается. Увеличение  $\epsilon$  приводит к повышению характеристической длины, что определяет возрастание влияния ККЭ, которое вызывает понижение  $U_{th}$ . Этот эффект обусловлен увеличением емкостной связи между стоком и каналом. В случае высокого  $k$  материала подзатворного диэлектрика фронтального затвора, влияние вертикального затворного электрического поля уменьшается благодаря утолщению физической толщины диэлектрика. Это приводит к сильному истощению стока связанного с каналом через изолятор затвора. Этот эффект (roll-off) существенно усиливается с увеличением градиента легирования. При этом для больших зазоров ( $\eta > 1$ ) он проявляется в меньшей степени, чем для  $\eta < 1$ . Для  $\eta > 1.4$  им можно пренебречь. Большие  $\eta$  приводят к значениям  $U_{th}$ , которые почти независимы от  $g$ . Следовательно, с увеличением  $\epsilon$  диапазон выбора  $\eta$  и  $g$  сужается, особенно при снижении значения  $\eta$ .

При переходе к более тонким слоям отмеченные тенденции сохраняются. На рис. 9 для прототипа транзистора n-типа с длиной затвора 22 нм, толщиной рабочей области 6 нм, толщинами подзатворного и погруженного окислов 0.9 нм и 50 нм, численно рассчитана величина порогового напряжения для трех значениях градиентов и трех значениях диэлектрической проницаемости. Значения порогового напряжения нормированы относительно  $U_{th}(\epsilon = 3.9\epsilon_0)$  для каждого градиента.

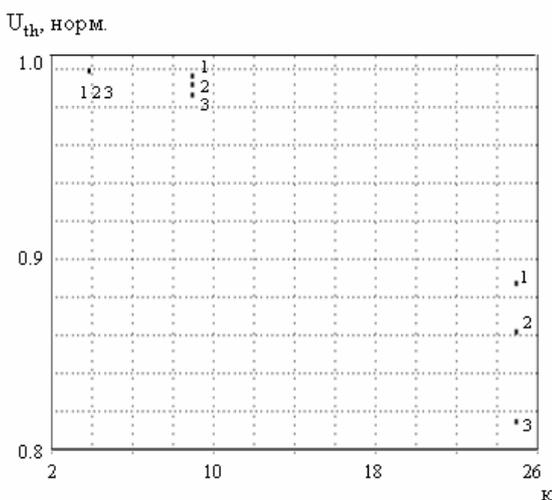


Рис. 8. Зависимость порогового напряжения  $U_{th}$  от диэлектрической проницаемости  $\epsilon = k\epsilon_0$  подзатворного диэлектрика фронтального затвора при  $\eta=1$ , где 1 -  $g=3$  нм/дек, 2 -  $g=4$  нм/дек, 3 -  $g=5$  нм/дек. Нормирующие значения  $U_{th}$ :  $g=3$  нм/дек  $U_{th} = 316$  мВ;  $g=4$  нм/дек  $U_{th} = 308$  мВ;  $g=5$  нм/дек  $U_{th} = 298$  мВ

В анализируемом диапазоне  $\epsilon$  абсолютная величина снижения порогового напряжения ( $\Delta U_{th}$ ) для  $g=3$  нм/дек составляет 35 мВ, для  $g=4$  нм/дек  $\Delta U_{th}=44$  мВ и для  $g=5$  нм/дек  $\Delta U_{th}=56$  мВ. Следовательно, с ростом значения градиента крутизна зависимости  $U_{th}(\epsilon)$  увеличивается. Для фиксированного значения  $\epsilon = 3.9\epsilon_0$   $\Delta U_{th}$  составляет 18 мВ,  $\epsilon = 9\epsilon_0$   $\Delta U_{th} \sim 22$  мВ и  $\epsilon = 25\epsilon_0$   $\sim 39$  мВ. Эти оценки позволяют сделать следующий вывод. В соответствии с критерием проявления ККЭ увеличение диэлектрической проницаемости диэлектрика фронтального затвора не приводит к существенному росту влияния ККЭ.

Формирование области свободной от затвора при помощи оптимизации  $g$  и  $\eta$ , допускает дополнительную степень свободы управления пороговым напряжением наряду с такими основными параметрами транзисторной структуры, как толщины  $t_{si}$  и  $t_f$ , что особенно важно при применении материалов с высокой диэлектрической проницаемостью, поскольку это влечет возрастание влияния ККЭ.

Недавно, германий (Ge) вновь привлек интерес как основной материал для создания высокоэффективных микросхем, так как ему присуща намного более высокая подвижность электронов и дырок по сравнению с кремнием. Однако, хорошо известно, что применение обычного окисла германия приводит к большим физическим и технологическим проблемам. Перспективными диэлектриками для использования в транзисторных структурах являются нитриды германия, которые показывают лучшую технологичность, чем обычные окислы германия [7]. Развитие техпроцессов с использованием диэлектрических пленок с высокими диэлектрическими константами для того, чтобы заменить  $\text{SiO}_2$  в кремниевых транзисторах становится решающим фактором в осуществлении проектов электронных схем на германии. Поэтому, стоит оценить возможные преимущества замены Si на Ge в перспективных нанотранзисторах. Исследуем возможности германия для двух затворных устройств в варианте как германий на изоляторе (ГНИ), в частности поведение характеристической длины  $l$ , которая, как известно, в модельных представлениях является индикатором проявления ККЭ в транзисторных структурах. Как правило, значение характеристической длины определяют из анализа распределения потенциала в рабочей области транзистора, который в свою очередь является решением 2D уравнения Пуассона. В общем случае решения уравнения Пуассона связаны с решением характеристического уравнения для нахождения собственных значений, которое (уравнение) вытекает

из условия непрерывности потенциала и электрического поля на границах рабочей области. Значения характеристической длины связано с собственными значениями следующим выражением

$$l = \frac{\pi}{\lambda_1} \quad [8]. \quad \text{В рассматриваемом случае}$$

характеристическое уравнение для собственных значений запишем, например, в виде:

$$\tan \lambda_n t_{Ge} = \frac{\varepsilon_{Ge} (C_f + C_b) \lambda_n}{\varepsilon_{Ge}^2 \lambda_n^2 - C_f C_b}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_{Ge}$  - диэлектрическая проницаемость германия,  $t_{Ge}$  - толщина рабочей области германия,  $C_f$  - емкость фронтального затвора,  $C_b$  - емкость обратного затвора

Собственные значения в рассматриваемом диапазоне толщин рабочей области приведены на рис. 9.

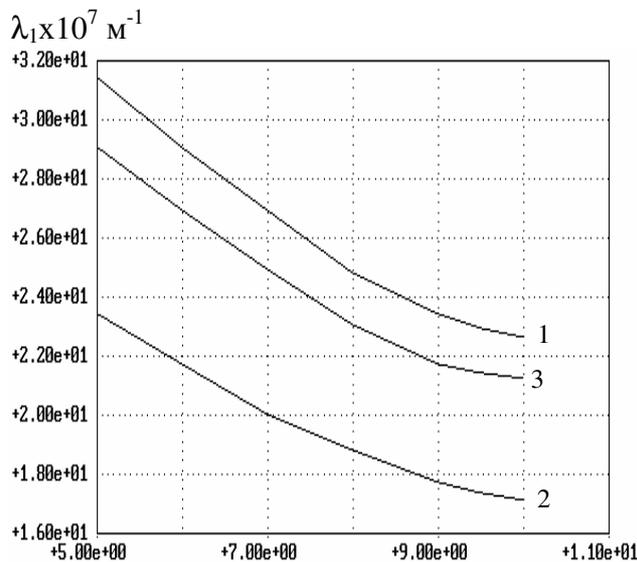


Рис. 9. Зависимость собственных значений от толщины рабочей области для различных диэлектриков фронтального затвора, где 1 – КНИ, затвор  $\text{SiO}_2$ , 2 – КНИ, затвор  $\text{HfO}_2$ , 3 – ГНИ, затвор нитрид оксида германия

Результаты представленные на рис 9 позволяют оценить степень проявления ККЭ при использовании различных материалов формирующих транзисторную структуру. Наиболее «мягким» случаем является традиционная структура КНИ, которая при толщине рабочей области 5 нм значение характеристической длины составляет 9.9 нм, для структуры ГНИ 10.8 нм и КНИ с фронтальным затвором окиси гафния 13.3 нм. С точки зрения создания высокоэффективных микросхем переход на германий более перспективен по сравнению со структурами КНИ с фронтальным затвором из окиси гафния, т.к. на германии ККЭ будут

проявляться при меньших длинах затвора, что в совокупности с более высокой подвижностью обуславливает выигрыш в быстродействии и рассеиваемой мощности.

## Заключение

В работе проанализированы пороговые характеристики двух затворных КНИ нанотранзисторов с архитектурой без перекрытия областей затвор-сток/исток для случая применения в качестве подзатворного диэлектрика фронтального затвора материалов с высоким значением диэлектрической проницаемости. Исследована степень влияния ряда технологических параметров на уровень порогового напряжения. В общем случае нелинейный характер полученных зависимостей обусловлен экспоненциальным ростом объемного заряда как функции потенциала в рабочей области транзистора. Реализация возможности регулировки пороговых напряжений связана с созданием диэлектрических слоев обратного затвора с толщинами, сравнимыми с толщинами рабочей области полупроводника при этом применение материалов с высоким значением диэлектрической проницаемости приводит к резкому ограничению этих возможностей. В общем случае с ростом диэлектрической проницаемости диэлектрика фронтального затвора величина порогового напряжения снижается. Использование материалов с высоким значением диэлектрической проницаемости приводит к усилению коротко-канальных эффектов. Этот эффект (roll-off) значительно усиливается с увеличением градиента легирования областей стока/истока. С увеличением диэлектрической проницаемости диапазон выбора технологических параметров, формирующие области без перекрытия, сужается, особенно при уменьшении зазора. При этом для больших зазоров значения порогового напряжения почти независимы от уровня градиента легирования стока/истока. Установлено, что технологические параметры, формирующие области без перекрытия, наряду с толщинами транзисторной структуры могут эффективно управлять пороговым напряжением.

Полученная оценка степени проявления ККЭ в двух затворной транзисторной структуре германий на изоляторе подчеркивает перспективность дальнейших исследований этой технологии.

## Литература

1. International technology roadmap for semiconductor 2010 edition. Available from: (<http://public.itrs.net>)
2. Н. В. Масальский. Оптимизация параметров двух затворных суб- 20 нм КНИ КМОП транзисторов с архитектурой «без перекрытия» // *Микроэлектроника.* - № 1(41), 2012. С. 57-64

3. A. Kranti, Y. Hao, G. A. Armstrong. Performance projections and design optimization of planar double gate SOI MOSFETs for logic technology applications // *Semiconductor Science and Technology*.- № 4 (23), 2008. P. 217-224
4. Н. В. Масальский. Синтез характеристик логических вентилях на двух затворных суб-25 нм КНИ КМОП транзисторах для маломощных применений // *Нано- и микросистемная техника*.- № 5(118), 2010. С. 41-46
5. A. Kranti, G. A. Armstrong. Engineering source/drain extension regions in nanoscale double gate (DG) SOI MOSFETs: Analytical model and design considerations // *Solid-State Electronics*.- № 2 (50), 2006. P. 437 - 447
6. С.М. Захаров. Пороговые характеристики полевых транзисторов со структурой «кремний на изоляторе» // *Микроэлектроника*.- № 1(32), 2003. С. 12-24
7. C. Chui, F. Ito, K. Saraswat. Scalability and electrical properties of germanium oxynitride MOS dielectrics // *IEEE Electron Devices Letts*.- № 9 (25), 2004. P. 613-615
8. X. Liang, Y. A. Taur 2-D Analytical Solution for SCEs in DG MOSFETs // *IEEE Trans Electron Devices*.- № 7 (51), 2004. P. 1385-1391

## Threshold-voltage characteristics of SOI CMOS nanotransistors with high-k gate dielectric

N.V. Masalsky

On the basis of numerical solutions of a Poisson equation threshold characteristics of two gate SOI CMOS of nanotransistors without overlapping of gate and a drain/source regions for an application case as a front date dielectric of materials with high value of dielectric permittivity are analyzed. The main attention is given to control of threshold voltage by means of a row of technological parameters. The non-linear characteristic of the received dependences is caused by exponential growth of a volume charge as potential functions in work area of the transistor. Use of materials with high value of dielectric permittivity leads to gain of short channel effects. The technological parameters creating areas without overlapping, along with thickness of transistor structure can effectively control threshold voltage. Preliminary estimates of prospects of transition to germanium transistor structures are received.

# Применение концепции виртуальных систем для решения задач оптических траекторных измерений

С.В. Мацыкин<sup>1</sup>, В.В. Осипов<sup>2</sup>, С.Б. Савилкин<sup>3</sup>.

*1 – кандидат технических наук, 2 – кандидат технических наук, 3 – кандидат физико-математических наук*

Рассматривается задача измерений параметров движения летательных аппаратов оптическими методами. Предлагается новый подход к решению данной задачи, основанный на использовании электронных методов получения и обработки изображений на основе применения концепции виртуальных приборов и систем, который позволяет существенно повысить оперативность обработки результатов измерений и довести ее практически до темпа реального времени.

## Введение

Для измерения параметров движения летательных аппаратов (ЛА) используются радиотехнические, оптические и оптико-электронные средства. В последние годы для этой цели также находят применение методы и средства, основанные на использовании систем спутниковой навигации.

Оптические средства начали использоваться для траекторных измерений одними из первых. В настоящее время они не потеряли своей актуальности и продолжают оставаться (наряду с радиотехническими средствами) одними из основных источников получения данных о траекторных параметрах ЛА.

Каждое из указанных средств имеет свои сильные и слабые стороны, определяемые их принципами действия, что и определяет области использования тех или иных средств измерений. Если сравнить измерительные средства, основанные на оптических методах, с радиотехническими, то можно сделать вывод, что последние имеют следующие преимущества:

- дальний радиус действия;
- высокая оперативность получения результатов измерений, достигающая реального масштаба времени (РМВ);
- слабая метеозависимость, т.е. практическая всепогодность.

Однако радиотехническим средствам присущ и ряд недостатков, происходящих из их принципов действия. К таковым следует отнести следующие:

- ограниченная точность измерений, особенно на малых расстояниях;
- сложность и высокая стоимость производства и эксплуатации;
- значительное энергопотребление;
- подверженность помехам как естественного, так и искусственного происхождения;
- необходимость обеспечения электромагнитной совместимости с другими радиоэлектронными средствами, использующими электромагнитные излучения в диапазонах радиоволн.

Данный недостаток особенно обостряется в последние годы, что связано с бурным развитием всевозможных телекоммуникационных систем

радиотехнического принципа, например, систем подвижной сотовой связи.

Оптические средства в значительной степени свободны от указанных недостатков. Они имеют высокую точность, существенно проще и дешевле радиотехнических средств, обладают незначительным потреблением энергии и не имеют проблем с электромагнитной совместимостью, ибо ничего не излучают. Кроме того, оптические средства имеют еще одно существенное преимущество – они позволяют получать визуальное изображение ЛА, что может значительно облегчить анализ нештатных ситуаций.

Главными недостатками оптических измерительных систем следует считать следующие:

- метеозависимость;
- низкая оперативность.

Анализ указанных недостатков приводит к выводу, что первый из них является принципиальной особенностью оптических методов измерений, и практически единственным способом его нейтрализации является установка оптических средств в регионах с преобладанием ясной погоды (что и делалось во все времена использования подобных средств). Второй недостаток (в отличие от первого) не является принципиальным. Его наличие объяснялось принятыми методами получения и обработки изображений, которые оставались практически неизменными с самого начала применения подобных средств в 40-е годы прошлого века.

В нашей стране различные времена был создан и успешно эксплуатировался ряд траекторных измерительных систем оптического принципа, обычно называемых кинотеодолитами и фоторегистрирующими станциями. К таковым относятся такие системы, как «Виола», «Висмутин» и ряд других. Подобные системы относятся к классу углоизмерительных приборов. Система обычно состоит из нескольких станций, разнесенных на некоторое расстояние от трассы полета ЛА. Каждая из станций геодезически привязана к местности с высокой точностью и измеряет пару угловых координат цели – углы азимута и места. Искомые координаты ЛА определяются путем обработки данных, полученных от нескольких станций (минимум от двух, чаще – от трех).

Принцип измерения углов является сходным для всех оптических средств. Он основан на фото- или киносъемке полета ЛА. При этом каждый кадр на

пленке сопровождается данными о текущем положении направления оптической оси объектива и соответствующем значении точного времени. Как правило, указанные данные непосредственно впечатывались в кадры на пленке оптическими методами. Сопровождение полета ЛА могло осуществляться вручную оператором или с использованием систем автосопровождения. Во всех случаях необходимо обеспечить постоянное нахождение ЛА в пределах поля зрения объектива.

Обработка результатов измерений, полученных такими средствами, являлась довольно долгим и трудоемким процессом: вначале было необходимо обработать полученные фотоматериалы – проявить, закрепить, промыть, высушить. Затем наступал этап покадровой обработки пленки: необходимо было визуально снять с кадра значения углов азимута и места и текущего времени, рассчитать поправку на смещение ЛА от центра кадра и внести результаты в специальные таблицы. Указанные операции производились вручную и требовали длительного и кропотливого труда большого числа квалифицированных специалистов. Несмотря на это, процесс обработки был длительным, и ошибки в расчетах не были редкостью.

Для повышения оперативности и достоверности результатов необходимо автоматизировать процесс обработки изображений. Это предполагает необходимость отказа от использования фотопроцессов и переход на новые принципы обработки электронных цифровых изображений. Современное развитие элементной базы оптоэлектроники и вычислительной техники создает благоприятные условия для решения этой задачи.

## 1. Оптико-электронный теодолит

Перспективным направлением модернизации существующих оптических измерительных средств является замена пленочного узла на оптико-электронный, содержащий первичный преобразователь цифрового изображения в виде ПЗС-матрицы. Такая матрица должна иметь достаточно хорошее разрешение, высокую чувствительность и геометрическую точность. Кроме того, они должны обеспечивать съемку с частотой кадров, не меньшей, чем при использовании киносъемки, т.е. порядка 24 кадров в секунду. К большому сожалению, отечественная электронная промышленность в настоящее время не производит ПЗС-матриц с подходящими характеристиками. Для использования в оптических средствах пригодны в основном матрицы производства фирмы Kodak, и с некоторыми ограничениями – продукция других иностранных фирм (например, фирмы LUPA). Изначально такие матрицы проектировались фирмой Kodak для применения в астрономических приборах (телескопах).

Переход от фотопленочной технологии регистрации изображения и измерения угловых координат к цифровой, благодаря применению ПЗС-матриц, привел к пересмотру технологии обработки измерительной информации. Появилась возможность

оценивать движение многих ЛА в реальном времени. Подобные системы стали именовать пассивными оптическими локаторами. Цифровая технология позволяет гибко менять конфигурацию измерительного комплекса, что важно при возникновении неблагоприятных условий измерений.

В цифровых оптических приборах в фокальную плоскость помещается ПЗС-матрица. Световой поток от видимых предметов преобразуется в электрический потенциал на каждом пикселе матрицы, затем с помощью аналого-цифрового преобразователя аналоговое значение потенциала преобразуется в цифровую форму. Если визирная линия прибора совпадает с направлением на ЛА, то геометрический центр его изображения на матрице располагается в области условного центра матрицы (перекрестия). В этом случае показания угловых датчиков дают сведения об угловых координатах направления визирной линии оптического прибора на цель. В общем случае геометрический центр отклоняется от центрального перекрестия. Измерению подлежит отклонение геометрического центра изображения от центра перекрестия в системе координат матрицы. Ориентация матрицы в пространстве определяется по показаниям датчиков угловых каналов. Измерения отклонений от центра перекрестия матрицы пересчитывают в поправки показаний датчиков угловых каналов. Комплекс из двух и более оптических локаторов позволяет оценивать такие параметры движения ЛА как координаты в избранной центральной системе координат, скорости и ускорения изменения координат и другие параметры, функционально связанные с указанными

Построение оптического цифрового локатора и измерительного комплекса на его основе, оценивающего параметры движения цели в реальном масштабе времени, приводит к необходимости решения ряда принципиальных задач:

- автоматизированный ввод видеoinформации в персональный компьютер, регистрация и обработка данных в реальном темпе времени;
- высокоточное оценивание положения изображения цели на матрице;
- вычисление угловых координат цели;
- определение параметров движения цели в реальном темпе времени.

## 2. Концепция виртуальных систем

В компьютерном регистраторе используются принципы концепции Виртуальных приборов и систем, которая активно проводится фирмой National Instruments (NI), (США). Кратко сущность этой концепции можно сформулировать следующим образом:

- построение систем с максимальным применением серийного компьютерного оборудования;
- виртуализация процессов преобразования данных (переход от использования реальных приборов к их программной эмуляции);

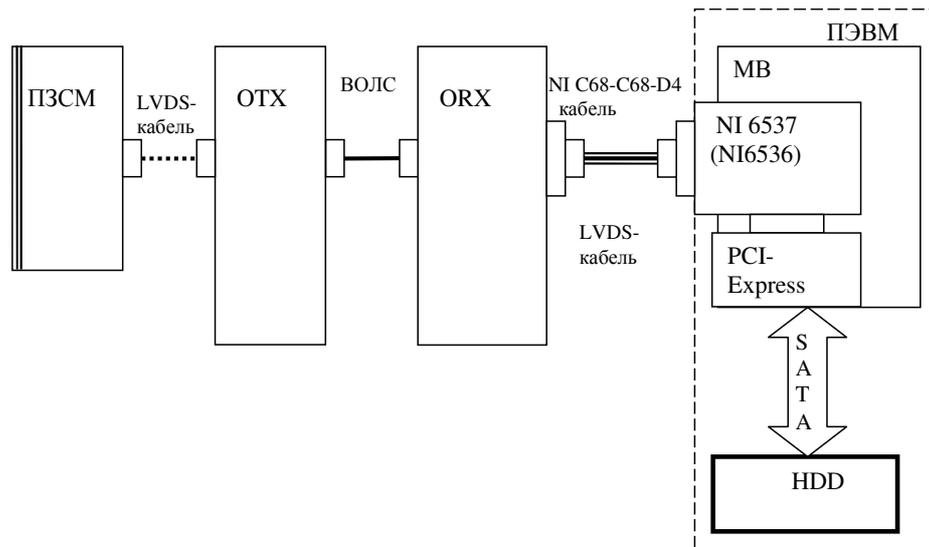


Рис.1 Структурная схема компьютерного регистратора.

Здесь: ПЗСМ – источник входной видеоинформации (ПЗС-матрицы); OTX – передатчик волоконно-оптической линии связи; ORX – адаптированный приемник волоконно-оптической линии связи; ВОЛС – кабель волоконно-оптической линии связи; NI C68-C68-D4 кабель – 68-проводной кабель фирмы NI; NI 6537 (NI 6536) – плата скоростного ввода цифровой информации фирмы NI; МВ – материнская плата ПЭВМ; PCI-Express – слот шины PCI-Express на МВ ПЭВМ; HDD – жесткий диск (диски) ПЭВМ; SATA – соответствующий интерфейс HDD.

- виртуализация органов управления и отображения (кнопки, тумблеры, переключатели, дисплеи, индикаторы и т.д. отображаются в виртуальном виде на экране компьютера);

- использование типовых модулей ввода-вывода аналоговых и цифровых данных с соответствующей программной поддержкой;

- создание программного обеспечения непосредственно самим разработчиком системы без привлечения специализированных программистов. Для этого применяются специальные программные среды.

Типичным примером такой программной среды является LabVIEW фирмы NI. В этой среде используется графическое программирование [2]. При этом процесс разработки программы выглядит как рисование блок-схемы прибора. На рис.1 приведена возможная структурная схема компьютерного регистратора [1]. Плата NI 6537 позволяет вводить информацию с максимальной скоростью 200 Мбайт/с.

### 3. Анализ результатов и выводы

1. Одновременное наблюдение нескольких ЛА, а

также их возможное случайное появление в широком поле обзора, требует построения оптических систем, позволяющих в реальном времени преобразовывать пространственные параметры принимаемых аналоговых оптических сигналов в цифровые данные, осуществлять сбор информации с нескольких измерительных пунктов и обработку алгоритмами, обладающими наименьшим числом вычислительных операций;

2. Существуют технические решения, позволяющие в реальном масштабе времени вводить информацию о широком поле обзора от измерительных ПЗС-матриц в ПК, регистрировать её и обрабатывать.

### Литература

1. В.В. Васильев, А.П. Манин, С.В. Мацыкин, И.Г. Семёнов. Анализ задач пассивной цифровой оптической локации. // Вопросы оборонной техники, 2010, №2.

2. R. Bitter, T. Mohiuddin, T. Nawrocki. LabVIEW advanced programming techniques. - New York, CRC Press LLC, 2001.

## Application of the concept of virtual systems for solving optical trajectory measurements

S.V Matsykin, V.V. Osipov, S.B. Savilkin

The problem of measurements of parameters of movement of flying machines is considered by optical methods. The new approach to the decision of the given problem is offered, based on use of electronic methods of reception and processing of images on the basis of application of the concept of virtual devices and systems which allows to raise essentially efficiency of processing of results of measurements and to finish it practically to rate of real time.

# Стойкость сложных технических систем: сценарный взгляд на проблему

Д.А. Кононов<sup>1</sup>, А.А. Кочкаров<sup>2</sup>, Н.О. Пономарев<sup>3</sup>

1 - доктор технических наук, 2 – кандидат технических наук, 3 - аспирант

Рассмотрены возможности сценарного подхода для исследования сложных технических систем. Предложена новая модель распространения возмущений по структуре технической системы, вызванных различными видами угроз. Формализованы понятия сценарной стойкости и живучести сложной технической системы на операторном графе при различных регламентах ее функционирования. Рассмотрены их сценарные характеристики, в том числе коэффициенты опасности.

## Введение

Моделирование сложных систем (СС) позволяет исследовать особенности их функционирования в различных условиях, при проектировании наделять их требуемыми характеристиками и снижать риск возникновения нештатных ситуаций (НШС). Поиск оптимальных механизмов управления сложными техническими системами (СТС) представляет собой сложную и в то же время важную задачу [1].

Анализ показывает, что с каждым годом повышается уровень сложности технических систем, используемых в человеческой деятельности. При этом происходит одновременное увеличение числа задействованных элементов в системе (размерная сложность), повышение разнообразия структур взаимодействия элементов (структурная сложность) и повышение разнообразия этого взаимодействия (функциональная сложность). Процесс увеличения сложности систем неизбежно приводит к увеличению количества и разнообразия различных типов рисков, сопутствующих их проектированию, наладке и эксплуатации. В зависимости от конкретной системы и ситуаций проявления этих рисков может быть различным. Риск может заключаться в возможности нарушения нормального функционирования или выхода из строя отдельного узла или всей системы в целом. Риски можно классифицировать не только по масштабам нарушений функционирования системы, но и по последствиям, вызываемым этим риском. В процессе эксплуатации системы очень важно иметь точную информацию о текущем состоянии системы и ее отдельных узлов и прогнозную информацию на будущие периоды времени. Эта информация необходима для своевременного распознавания отклонений состояния системы от нормального и для принятия решений по их устранению. В СТС для получения текущей информации об их состоянии используются специальные системы мониторинга различной степени автоматизации.

Безопасность СТС следует изучать с трех основных позиций: *стойкости, живучести системы и общей надежности системы*. Каждая из этих позиций по-разному описывает связь и взаимодействие системы с окружающей ее средой. Исследование перечисленных свойств системы позволяет уменьшить риск воз-

никновения НШС и чрезвычайных ситуаций (ЧС), приводящих к авариям и катастрофам СТС.

*Надежность* – свойство системы сохранять в течение заданного промежутка времени значение параметров, характеризующих стационарное функционирование системы. Надежность – это комплексное свойство системы, связанное с ее безотказностью, ремонтируемостью и т.д.

Теория надежности использует аппарат теории вероятностей и математической статистики. Как правило, для оценки возможности реализации опасного состояния системы используют дерево событий (отказов): диаграммное представление всех событий (отказов), последовательное и/или совместное появление которых в системе приводит к некоторому главному событию (возможно, потенциально опасному происшествию). Зная вероятности появления событий (например, отказов), подсчитывают возможность возникновения смежного события. В зависимости от задачи и традиций предметной области таким событием обычно называют либо отказ какого-либо элемента системы.

Здесь вершины графа представляют собой мыслимые события: на дуге графа в такой модели показывают вероятность перехода от события к событию, а сценарий представляет собой последовательно наступающие события. Лучшим в таких условиях считают наиболее вероятный сценарий.

В сложных многоэлементных системах к потенциально опасному происшествию могут привести последовательные и/или совместные отказы различных элементов системы. Поэтому для повышения надежности элементов (вероятности безотказной работы) системы, и как следствие, надежности самой системы, используются различные методы резервирования.

Надежность как интегральная характеристика процесса эксплуатации СТС зависит от назначения объекта, условий его эксплуатации и т.п. При проектировании СТС в модели ее функционирования следует выделить ряд подсвойств, характеризующих эти условия. В настоящей работе рассмотрим две характеристики: стойкость и живучесть СТС.

*Стойкостью* системы назовем ее способность противостоять несанкционированным ЛПР воздействиям и функционировать в штатном режиме в условиях возникновения НШС. Поэтому основной характери-

стикой стойкости системы служит время достижения системой предельного состояния работоспособности. Увеличение этого промежутка времени будет способствовать уменьшению риска развития НШС в системе.

*Живучесть* – свойство системы, характеризующее ее способность функционировать под влиянием воздействий, возникающих в процессе ее функционирования. Это понятие целесообразно использовать в организационно-технических системах, в которых (в отличие от технических) присутствуют риски типа «человеческий фактор». Живучесть систем обычно изучают на основе применения вероятностных моделей, в рамках математической теории надежности, и на основе детерминистических, в рамках механики катастроф.

Живучесть и стойкость систем являются характеристиками, которые позволяют оценить риск возникновения нештатных ситуаций при эксплуатации СТС. Используя эти критерии, можно обеспечить безопасность систем при НШС или наделить системы необходимыми качественными характеристиками, не допускающими их возникновения.

В настоящем исследовании рассматривается новый формализованный метод исследования проблемы управления стойкостью и живучестью СТС, отличный от известных схем анализа проблемы: сценарный подход. В рамках предлагаемой модели для СТС изучаются как задачи, связанные с недопущением НШС, так и возможные стратегии управления риском, в том числе при выходе из строя элементов системы и восстановления ее функционирования.

## 1. Модель распространения возмущений функционированию СТС

Представление структуры системы (технической, социально-экономической, телекоммуникационной, информационно-управляющей, и т.д.) в виде графа – общепризнанный подход к визуальному и модельному представлению связей между элементами системы. Структура системы в зависимости от моделируемого процесса или явления может оставаться стационарной или претерпевать определенные регулярные изменения. В этом случае речь идет о системах с динамическими изменяемыми структурами.

Суть используемого подхода в следующем. Структура системы и взаимодействие элементов при ее функционировании представляют в виде ориентированного графа. Каждой вершине и каждой дуге графа присваивают параметры и функционалы, адекватно описывающие процессы функционирования элементов исследуемой (моделируемой) системы.

Динамика изменения состояния системы в указанной модели может быть задана принципиально двумя различными способами: импульсом (возмущением) значения параметров в заданных вершинах и/или изменением структуры системы (матрицы смежности орграфа). Начальный импульс (возмущение), приложенный к одной или группе вершин, распространяется по всему графу, изменяя параметры вершин. Меняется и величина самого импульса в соответствии с функционалами, присвоенными дугам графа. В системах с изменяющейся структурой целесообразно вести кон-

троль происходящих изменений структуры для формирования спектра соответствующих свойств и характеристик. Достижение этой цели лежит в русле решения задач структурного мониторинга или управления структурной динамикой.

*Потенциалом работоспособности элемента* системы  $x_i \in X$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\} = N$  в момент времени  $t$  назовем величину  $v_i(t)$ , характеризующую способность элемента выполнять заданные функции в соответствии с установленным целевым режимом функционирования (ЦРФ). Соединение элементов в единую систему задается ее структурой. Элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности  $A = \{a_{ij}\}$   $i, j \in N$  задает степень изменения ресурса работоспособности  $j$ -го элемента системы при совместной работе с  $i$ -м ее элементом.

Изменение ресурса работоспособности может происходить по следующим причинам:

- совместный режим функционирования со смежным элементом;
- естественный износ элемента;
- негативные внешние воздействия,
- восстановление ресурса на основе его ремонта;
- изменение режима совместного функционирования смежных элементов.

Совместный режим функционирования  $j$ -го элемента системы при совместной работе с  $i$ -м ее элементом изменяет его ресурс на величину  $a_{ij} v_i(t)$ .

Естественный износ элемента  $x_i \in X$  моделируется петлей матрицы смежности  $a_{ii} \neq 0$ .

Внешние воздействия моделируются импульсами, вносимыми в вершину.

Изменение режима совместного функционирования смежных элементов моделируется изменением матрицы смежности.

Для сценарного исследования СС на орграфе оперирующая сторона располагает следующими средствами мониторинга в момент времени  $t$ :

- обнаруживать накопленные изменения состояния системы в виде  $k$ -шагового импульсного процесса  $\mathbf{Im}(t, k) = (\mathbf{Im}_j(\tau) \ 1 \leq j \leq n; \ t \leq \tau \leq t+k)$ ;

- обнаруживать накопленные изменения структуры в виде  $k$ -шагового структурного процесса  $\Phi(t, k) = (A(\tau) \ t \leq \tau \leq t+k)$ ;

- обнаруживать накопленные общие изменения в виде комплексного процесса  $K(t, k) = (\mathbf{Im}(t, k), \Phi(t, k))$ .

Для управления процессом функционирования СТС на орграфе оперирующая сторона располагает средствами управления в момент времени  $t$ :

- применять в качестве управляющих воздействий  $k$ -шаговый импульсный процесс  $\mathbf{Im}^{(0)}(t, k) = (\mathbf{Im}^{(0)}_j(\tau) \ 1 \leq j \leq n; \ t \leq \tau \leq t+k)$ ;  $\mathbf{Im}^{(0)}(t) = (\mathbf{Im}^{(0)}_j(t) \ 1 \leq j \leq n)$ ;

- применять в качестве управляющих воздействий  $k$ -шаговый структурный процесс  $\delta\Phi(t, k) = (\delta A(\tau) \ t \leq \tau \leq t+k)$ ;

- применять как управления комплексный процесс  $\delta K(t, k) = (\mathbf{Im}^{(0)}(t, k), \delta\Phi(t, k))$ .

В соответствии со схемой преобразования состояния в операторных графах динамику системы определяет соотношение:

$$(1) \ \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t-1) + \mathbf{Im}(t) \text{ при } t=1, 2, \dots,$$

где

$$(2) \ \mathbf{Im}(t) = A(t-1)\mathbf{Im}(t-1) + \mathbf{Im}^{(0)}(t) \text{ при } t=1, 2, \dots$$

Здесь  $\mathbf{v}(0)=\mathbf{v}^{(0)}$  – начальное,  $\mathbf{v}(t)$  – текущее состояние системы;

$\mathbf{v}(t-1)$  – предыдущее состояние системы в момент времени  $t-1$ ;

$A(t-1)$  – матрица смежности в момент  $t-1$ ;

$\mathbf{Im}(t-1)$  – импульс, накопленный к моменту времени  $(t-1)$ ,  $\mathbf{Im}(0)=\mathbf{Im}^{(0)}$  – начальный импульс;

$\mathbf{Im}^{(0)}(t)$  – импульс в момент времени  $t=1, 2, \dots$

Преобразование состояния происходит по следующему алгоритму в момент времени  $t=1, 2, \dots$ :

– на вход вычисления подаются: предыдущее состояние  $\mathbf{v}(t-1)$ , предыдущий накопленный импульс  $\mathbf{Im}(t-1)$ , а также матрица смежности  $A(t-1)$ ;

– вносится текущий импульс (импульсное управление)  $\mathbf{Im}^{(0)}(t)$ ;

– вычисляется текущий накопленный импульс (2);

– по правилу (1) **Ошибка! Источник ссылки не найден.** вычисляется текущее состояние  $\mathbf{v}(t)$ ;

– вносится структурное аддитивное управление  $\delta A(t)$  и матрица смежности преобразуется по правилу:

$$(3) A(t)=A(t-1)+\delta A(t);$$

– проверяется условие завершения горизонта сценария  $t=T$ : в случае  $t < T$  проводится очередной шаг; в случае  $t=T$  процесс завершается.

Если обнаружен (задан) комплексный процесс

$$(4) K(t,k)=(\mathbf{Im}(t,k), \Phi(t,k)),$$

или задан комплексный процесс

$$(5) \delta K(t,k)=(\mathbf{Im}^{(0)}(t,k), \delta\Phi(t,k)),$$

в соответствии с правилами (1)-(3) могут быть построены  $k$ -пошаговые сценарии  $\mathfrak{K}(K(t,k))$  и  $\mathfrak{K}_\delta(\delta K(t,k))$  поведения системы соответственно [2].

## 2. Сценарная стойкость СТС как характеристика безопасности функционирования СТС

Сценарное исследование функционирования СТС представляет собой специальный метод изучения на основе представления ее в виде формального системного объекта. Методология содержит 3 укрупненных этапа: построение сценарной системы, сценарный анализ, сценарный синтез. Целью разработки сценарной системы является осуществление эффективного сценарного анализа и сценарного синтеза, т.е. генерации спектра сценариев функционирования и развития СС, удовлетворяющих заданным ЛПР критериям поведения СС. Основы методологии сценарного исследования безопасности СС сформулированы в [2].

Безопасность системы можно обеспечить рядом способов, в частности: не допустить развитие НШС в системе, не допустить выхода НШС за пределы системы и свести к возможному минимуму влияние аварий на окружающую систему среду. Сценарии безопасного функционирования характеризуют желательные способы развития СТС, сохраняющие ЦРФ и гарантирующие отсутствие НШС.

Пусть в соответствии с моделью поведения системы (1)-(2) задан детерминированный пошаговый сценарий  $\mathfrak{K}$  с горизонтом  $T$ .

Для формализации понятия сценарной стойкости следует рассмотреть понятие угрозы функционирования сложной технической системы.

Угрозой назовем наличие гипотетической возможности реализации нежелательных явлений (ситуаций). При описании СТС в виде формального системного объекта под угрозой будем понимать совокупность факторов системы и внешней среды, могущих привести с точки зрения ЛПР к существенному ухудшению состояния ее параметров, в том числе НШС.

Предложим две модели формализации.

Модель 1 («Угроза-возмущение»).

В модели «Угроза-возмущение» угрозой назовем изменения значений потенциалов работоспособности  $v_i(t)$  элемента  $x_i \in X$ , либо изменения режима совместного функционирования  $a_{ij}$  смежных элементов  $x_i, x_j \in X$ . В модели зададим множество возможных угроз  $\Omega^{(Y)} = \Omega \mathbf{Im}^{(Y)} \times \Omega A^{(Y)} \subseteq E^n \times E^{2n}$ , реализуемых в виде импульсов-возмущений  $\mathbf{Im}^{(Y)} \in \Omega \mathbf{Im}^{(Y)}$  или изменений структуры  $\delta A(t) \in \Omega A^{(Y)}$  системы.

Таким образом, в модели «Угроза-возмущение» априори задано множество угроз, и возникает вопрос об отклонении системы от ЦРФ при их реализации.

Модель 2 («Угроза-НШС»).

В модели «Угроза-НШС» угрозой назовем возможность реализации нештатных ситуаций, т.е. возможность приобретения потенциалом работоспособности  $v_i(t)$  элемента  $x_i \in X$ , либо режимом совместного функционирования  $a_{ij}$  смежных элементов  $x_i, x_j \in X$  значений из области недопустимых ситуаций  $\Omega^{(YH)}$ . В модели зададим множество нештатных ситуаций  $\Omega^{(YH)} = \Omega V^{(YH)} \times \Omega A^{(YH)} \subseteq E^n \times E^{2n}$ , в том числе множество нештатных состояний  $\Omega V^{(YH)} \subseteq E^n$  системы, а также множество нештатных состояний ее структуры  $\Omega A^{(YH)} \subseteq E^{2n}$ .

В модели «Угроза-НШС» априори задано множество нештатных ситуаций  $\Omega^{(YH)}$ , и возникает вопрос о поиске нежелательных возмущений потенциалов работоспособности и режимов совместного функционирования, т.е. угроз в смысле модели «Угроза-возмущение» (обратная задача).

Пусть

– задано множество возможных угроз  $\Omega^{(Y)} \in E^n$ , реализуемых в виде импульсов  $\mathbf{Im}^{(Y)} \in \Omega \mathbf{Im}^{(Y)}$  или изменений структуры  $A(t) \in \Omega A^{(Y)}$  системы;

– обнаружен комплексный процесс возмущений  $K^{(B)}(t,k)=(\mathbf{Im}^{(B)}(t,k), \Phi^{(B)}(t,k))$ , где  $\mathbf{Im}^{(B)}(t,k) \in \Omega \mathbf{Im}^{(Y)}$  и  $\Phi^{(B)}(t,k) \in \Omega A^{(Y)}$ ;

– построен пошаговый сценарий, соответствующий процессу возмущений  $K(t,k)$ .

При сценарном исследовании проблема обеспечения безопасности СТС сводится изучению ее свойств и разработке характеристик, обеспечивающих возможность реализации сценариев безопасности функционирования в различных режимах эксплуатации.

Исходные определения даны в терминах ситуации.

**Определение 1.** Ситуация  $S(t)$  называется безопасной, если  $\mathbf{z}(t) \in \text{int}Q$  для всех экспертно-значимых событий из  $S(t)$ , т.е. траектория содержится внутри множества условно допустимых состояний  $Q$  и задает проектный целевой режим функционирования СТС. Опре-

деление таких ситуаций, а также способы задания множества  $Q$  могут быть различными.

**Определение 2.** Сценарий  $\mathfrak{K}$  назовем сценарием безопасности, если для всех  $\tau \in \tilde{T} = \{0, 1, \dots, T\}$  ситуация  $S(\tau)$  является безопасной, т.е.  $\mathbf{z}(\tau) \in \text{int}Q$  для всех  $\tau \in \tilde{T}$ .

**Определение 3.** Будем говорить, что система обладает свойством стойкости (модель «Угроза-возмущение») по отношению к системе угроз  $\Omega^{(Y)} = \Omega \text{Im}^{(Y)} \times \Omega A^{(Y)}$ , если для каждого комплексного процесса возмущений  $K^{(B)}(t, k) \in \Omega^{(Y)}$  пошаговый сценарий  $\mathfrak{K}(K^{(B)}(t, k))$ , соответствующий процессу  $K^{(B)}(t, k)$  является сценарием безопасности.

В рамках модели «Угроза-НШС» определение границ допустимости  $\delta = \{\delta_i, i \in N\}$  рассогласования между ЦРФ  $\mathbf{a}$  и текущим потенциалом работоспособности СТС  $\mathbf{v}(t)$  задается в виде условий:

$$\rho(\mathbf{v}(t) - \mathbf{a}) \leq \delta \text{ при } t=1, 2, \dots,$$

где  $\rho$  – заданная метрика. В частности, при задании границ допустимости

$$\delta(t) = \{\delta_i(t), i \in N\} \text{ при } t=1, 2, \dots,$$

по каждому элементу системы временные границы стойкости системы по отношению к комплексным возмущениям (4)-(5) должны удовлетворять условиям:

$$|v_i(t) - a_i| \leq \delta_i(t) \text{ при } t=1, 2, \dots, i \in N.$$

При этом границы стойкости существенно зависят от  $\rho$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\delta$ .

Определение предложенных характеристик позволяет определить критерии стойкости СТС при рассматриваемых комплексных возмущениях.

**Определение 4.** Временной границей  $T_i^{(re)}(K(t, k))$  стойкости элемента  $x_i$  СТС в обстановке  $\mathbf{v}(t)$  по отношению к комплексному возмущению (5) назовем первый момент выхода сценария  $\mathfrak{K}(K(t, k))$  за  $\varepsilon_i$ -окрестность вектора  $\mathbf{a}$ . Оценку

$$T_i^{(re)}(K(t, k)) = \min_{1 \leq i \leq n} [T_i^{(re)}(K(t, k))]$$

назовем временной границей элементной стойкости СТС в обстановке  $\mathbf{v}(t)$  по отношению к комплексному возмущению  $K(t, k)$ .

**Задача 1.** (определение временной границы стойкости).

Пусть при  $t=0$  зафиксирована реализация комплексного процесса возмущений (5). Определить временные границы стойкости элементов  $T_i^{(re)}(K(t, k))$  стойкости СТС и временную границу элементной стойкости  $T^{(re)}(K(t, k))$  СТС по отношению к комплексному процессу возмущений  $K(t, k)$ .

**Теорема 1.** Временная граница стойкости элемента  $x_i$  определяется условиями:

$$\left[ \sum_{\tau=0}^t \prod_{r=\tau}^t \left[ \sum_{l=1}^{t-r} \delta A(l) + A(0) \right] \mathbf{I}^{(0)}(\tau) \right]_i = \varepsilon_i(t),$$

т.е. временем достижения возмущением предельной величины. Доказательство следует из результатов в [3].

**Теорема 2.** (Критерий стойкости СТС). СТС обладает свойством стойкости до момента времени  $T$  по отношению к заданной последовательности угроз  $K^{(B)}(t, k)$ , если выполнено условие

$$(6) T^{(re)}(K^{(B)}(t, k)) = \min_{1 \leq i \leq n} [T_i^{(re)}(K^{(B)}(t, k))] \geq T.$$

Пусть задано множество возможных угроз  $\Omega^{(Y)}$ , а также момент времени  $T$ .

**Теорема 3.** (Критерий стойкости СТС). СТС обладает свойством стойкости до момента времени  $T$  по отношению к заданному множеству угроз  $K^{(B)}(t, k) \in \Omega^{(Y)}$ , если для всех  $K^{(B)}(t, k) \in \Omega^{(Y)}$  выполнено

$$T^{(re)}(K^{(B)}(t, k)) = \min_{1 \leq i \leq n} [T_i^{(re)}(K^{(B)}(t, k))] \geq T.$$

Предложенный механизм моделирования и последующего анализа модели позволяет решать ряд задач оптимального мониторинга надежности (стойкости) функционирования СТС.

**Задача 2.** (оптимальной мониторинг элемента).

Пусть известно, что в момент времени  $t=0$  зафиксирована реализация начала комплексного процесса возмущений (5). Определить множество моментов времени  $t \in Mm$ , которые полностью определяют определение границы стойкости элемента (6).

**Задача 3.** (оптимальный мониторинг системы).

Пусть известно, что в момент времени  $t=0$  зафиксирована реализация начала комплексного процесса возмущений (5). Определить множество моментов времени  $t \in Mm$ , которые полностью определяют определение границы стойкости системы (6).

### 3. Выбор управляющих воздействий в зависимости от регламентов функционирования СТС

Цели функционирования СТС могут быть представлены некоторой целевой моделью, например в виде дерева целей. Тогда под **режимом** понимают множество выполняемых функций, необходимых для реализации заданного целевого режима функционирования (один из путей в дереве целей). Определенному режиму соответствует определенный набор средств: конфигурация аппаратных и программных средств, совокупность информационных ресурсов и выполняемых процедур и т.п. В конкретный момент времени выполняется только один режим.

Под функцией понимают совокупность необходимых действий для выполнения операций по соответствующей дуге дерева целей при реализации заданного режима функционирования СТС. Относительно режимов функции классифицируют следующим образом:

обязательные, т.е. функции, без которых функционирование конкретного режима невозможно;

совместимые, т.е. функции, которые могут быть реализованы в данном режиме, но это не является необходимым условием;

несовместимые, т.е. функции, выполнение которых в данном режиме запрещено.

Под **регламентом** функционирования СТС будем понимать организационный процесс реализации целей текущего режима ее функционирования, в том числе набор выделенных средств, их конфигураций, а также порядок функционирования и обслуживания.

Принципиально модель сценарного исследования стойкости функционирования ОТС в проектном регламенте содержит следующие компоненты:

Модель 3 («Регламент функционирования»).

$$P^\Phi = \{S; X, A; y; \Delta\phi; M\Omega^{(Y)}\},$$

где

$S$  – обозначение изучаемой системы;

$X$  – набор выделенных средств для функционирования регламента;

$A$  – конфигурация выделенных средств для функционирования регламента;

$y = \{v_i\} \in E^{nX}$  – потенциалы работоспособности элементов  $x_i \in X$   $i=1, 2, \dots, nX$ .

$\Delta t\phi = [t\phi_n, t\phi_k]$  – горизонт функционирования;

$M\Omega^{(Y)}$  – множество угроз при функционировании регламента.

Классифицировать регламенты можно по различным признакам:

- по используемым системным элементам,
- продолжительности исполнения,
- выполняемым функциям,
- критериям согласованности управления,
- сравнительным характеристикам стойкости;
- применяемым методам управления и т.п.

По компонентам кортежа  $P^\Phi$  могут быть определены понятия Т-шаговой угрозы.

Множество регламентов функционирования системы  $S$  обозначим  $MP(S)$ , а множество совместных регламентов  $CP(S) \subseteq MP(S)$ .

Пусть в момент времени  $t$  функционируют регламенты  $P_j^\Phi(S)$   $j \in CP(S)$  с кортежами

$$P_j^\Phi(S) = \{S; S_j; A_j; v^{(j)}; P\phi_j; P\omega_j; \Delta_j\phi; M\Omega^{(Y,j)}, M\Omega^{(P,j)}\},$$

где

$S$  – обозначение изучаемой системы;

$j$  – номер регламента функционирования изучаемой системы;

$X_j$  – набор выделенных средств  $x_i^{(j)} \in X_j$   $i \in nX_j$  для функционирования регламента  $j$ , где  $nX_j$  – множество индексов выделенных средств в общей конфигурации элементов системы;

$A_j$  – матрица смежности конфигурации выделенных средств  $\{a_{il}^{(j)}\}$   $l, i \in nX_j$  для функционирования регламента  $j$ ;

$v^{(j)} \in E^{nX(j)}$  – потенциалы работоспособности элементов  $x_i^{(j)} \in X_j$   $i \in nX_j$ ;

$\Delta t_j\phi = [t_j\phi_n, t_j\phi_k]$  – горизонт функционирования регламента  $j$ ;

$M\Omega^{(Y,j)}$  – множество угроз при функционировании регламента  $j$ ;

Пусть заданы также

– вектор  $f \in Z$ ,

–  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(Y,j)}$  – реализация комплексного процесса возмущений,

– неотрицательные числа  $\varepsilon(K^{(B)}(\Delta))$  и  $\varepsilon(K^{(P)}(\Delta))$  – допустимые границы отклонения потенциала работоспособности от ЦРФ СТС при реализации угроз и ремонтов соответственно.

Можно определить ряд исходных характеристик текущей ситуации, в которой находится система  $S$ .

#### Общие характеристики текущей ситуации.

Набор активных средств  $MX^{(a)}(t)$  в момент времени  $t$

$$MX^{(a)}(t) = \bigcup_{j \in CP(S,t)} X_j,$$

где  $CP(S, t)$  – множество регламентов, функционирующих в момент времени  $t$ . Набор активных средств определяет те элементы системы  $S$ , которые в момент  $t$  эксплуатируются, а значит, априори могут подвергаться износу.

Набор пассивных средств  $MX^{(p)}$  в момент времени  $t$

$$MX^{(p)}(t) = \bigcup_{j \in CP(S)/CP(S,t)} X_j.$$

Набор пассивных средств определяет элементы системы  $S$ , которые в момент  $t$  не эксплуатируются.

Текущая конфигурация активных средств  $A^{(a)}(t)$

$$A^{(a)}(t) = \{A_j | j \in CP(S, t)\}.$$

Эта характеристика требуется для определения степени износа активных средств при функционировании системы в режиме выполнения совместных регламентов.

Требуемое время исполнения регламента  $j$

$$\Delta t_j = t_j\phi_k - t,$$

которое определяет оставшееся время функционирования системы в регламенте  $j$ .

Требуемое время исполнения текущих регламентов

$$\Delta t[CP(S, t)] = \max_{j \in CP(S,t)} \Delta t_j\phi_k,$$

определяет оставшееся время функционирования системы в рассматриваемом множестве регламентов.

Текущие потенциалы работоспособности элементов системы  $v(t)$ , в том числе

– текущие потенциалы работоспособности  $v^{(a)}(t)$  активных элементов системы

$$v^{(a)}(t) = \{v_i(t) | i \in \bigcup_{j \in CP(S,t)} nX_j\};$$

– текущие потенциалы работоспособности  $v^{(p)}(t)$  пассивных элементов системы

$$v^{(p)}(t) = \{v_i(t) | i \in \bigcup_{j \in CP(S)/CP(S,t)} nX_j\}.$$

Целевой режим работоспособности  $v^{(u)}$  элементов системы.

Вектор текущих необходимых ремонтов работоспособности элементов системы

$$v^{(rec)}(t) = v^{(u)}(t) - v(t) - \varepsilon(t).$$

Характеристики могут быть использованы для определения текущих характеристик стойкости СТС, а также текущих угроз и возможности ремонтов.

#### Сценарные характеристики угроз в текущей ситуации для системы $S$ .

Множество  $M\Omega^{(Y,t)}$  текущих угроз

$$M\Omega^{(Y,t)} = \bigcup_{j \in CP(S,t)} M\Omega^{(Y,j)}.$$

Определяет комплексные процессы возмущений, которые могут служить угрозами стойкости СТС в момент времени  $t$  при функционировании системы в режиме совместного выполнения регламентов.

Результат  $F^{(j)}(K^{(B)}(\Delta), t)$  возмущения ЦРФ СТС комплексным процессом возмущений  $K^{(B)}(\Delta)$  в момент времени  $t$  при функционировании регламента  $j$ .

Определяет вектор возмущений, соответствующий комплексному процессу возмущений в момент времени  $t$  при функционировании регламента  $j$ .

Результат  $\mathbf{F}(K^{(B)}(\Delta), t)$  возмущения ЦРФ СТС комплексным процессом возмущений  $K^{(B)}(\Delta)$  в момент времени  $t$  при функционировании системы в режиме совместного выполнения регламентов.

Определяет вектор возмущений, соответствующий комплексному процессу возмущений в момент времени  $t$  при функционировании системы в режиме совместного выполнения регламентов.

Время  $T_{ij}^{(re)}(f_i, K^{(B)}(\Delta))$  достижения результатом возмущения ЦРФ СТС комплексного процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta)$  величины  $f_i$  при функционировании регламента  $j$

Определяет период времени, когда возмущения, соответствующие комплексному процессу возмущений достигнут заданной величины при функционировании регламента  $j$ .

Время  $T_i^{(re)}(f_i, K^{(B)}(\Delta))$  достижения результатом возмущения ЦРФ СТС комплексного процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta)$  величины  $f_i$  при функционировании системы в режиме выполнения совместных регламентов

$$T_i^{(re)}(f_i, K^{(B)}(\Delta)) = \min_{j \in CP(S,t)} T_{ij}^{(re)}(f_i, K^{(B)}(\Delta)),$$

Определяет время, заданной величины возмущения при функционировании системы в режиме выполнения совместных регламентов.

Временная граница стойкости  $T_{ij}^{(re)}$  элемента системы  $x_i$  при функционировании регламента  $j$

$$T_{ij}^{(re)} = \min_{K \in M\Omega^{(Y,j)}} T_{ij}^{(re)}(\delta_i, K).$$

Определяет максимальный срок безремонтного целевого функционирования элемента системы  $x_i$  при функционировании регламента  $j$ .

Временная граница стойкости  $T_{ij}^{(re)}$  системы при функционировании регламента  $j$

$$T_{ij}^{(re)} = \min_{i=1,n} T_{ij}^{(re)},$$

Определяет максимальный срок безремонтного целевого функционирования элемента системы  $x_i$  при функционировании регламента  $j$ .

Текущая временная граница стойкости  $T_{ij}^{(re)}$  элемента системы  $x_i$  при функционировании регламента  $j$

$$T_{ij}^{(re)}(t) = t - T_{ij}^{(re)}$$

Определяет оставшееся время целевого функционирования элемента системы  $x_i$  при функционировании системы в режиме выполнения регламента  $j$ .

Временная граница стойкости  $T_i^{(re)}$  элемента системы  $x_i$

$$T_i^{(re)} = \min_{j \in CP(S,t)} T_{ij}^{(re)}.$$

Определяет время целевого функционирования элемента системы  $x_i$  при функционировании системы в режиме выполнения совместных регламентов.

Текущая временная граница стойкости  $T_i^{(re)}$  элемента системы  $x_i$

$$T_i^{(re)}(t) = t - T_i^{(re)}$$

Определяет оставшееся время функционирования элемента системы  $x_i$  при функционировании системы в режиме выполнения совместных регламентов.

Множество  $M^{(Y)}T_{ij}(T)$   $T$ -шаговых угроз элементу системы  $x_i$  при функционировании регламента  $j$

$$MT_{ij}(T) = \{K \in M\Omega^{(Y,j)}, \text{ для которых } T_{ij}^{(re)}(K) = T_{ij}^{(re)}(t)\}.$$

Множество  $MT_i(T)$   $T$ -шаговых угроз элементу системы  $x_i$  при функционировании системы в режиме выполнения совместных регламентов

$$MT_i(T) = \min_{j \in CP(S,t)} MT_{ij}(T).$$

Определение указанных множеств позволяет ранжировать множество угроз элементам системы по степени опасности при функционировании системы.

Пусть для элемента системы  $x_i$  обнаружен комплексный процесс возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(Y,j)}$ , представляющий угрозу его работоспособности при функционировании регламента  $j$ , и определена временная граница его стойкости  $T_{ij}^{(re)}$ , а также ущерб  $D_i$  от прекращения функционирования. Отметим, что опасность тем больше, чем больше ущерб и тем меньше, чем больше временная граница стойкости. Тогда множество угроз можно ранжировать по коэффициенту опасности.

**Определение 5.** Коэффициентом опасности ЦРФ СТС при отказе элемента  $x_i$  при реализации процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(Y,j)}$  при функционировании регламента  $j$ , назовем величину

$$Kd_i(K^{(B)}(\Delta)) = g^{(B)}_i(D_i, T_{ij}^{(re)}),$$

где функция  $g^{(B)}_i(x, y)$  является возрастающей по первому аргументу и убывающей по второму, в частности одним из вариантов может служить функция  $g^{(B)}_i(x, y) = x/y$ . Задачи построения функции  $g$  для различных проблемных ситуаций и предметных областей представляют собой новое перспективное направление исследований.

Определение 5 позволяет построить интегральные характеристики опасности.

Максимальный коэффициент опасности ЦРФ СТС при отказе элемента  $x_i$  при реализации процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(Y,j)}$  при функционировании регламента  $j$

$$Kdmax_i(K^{(B)}(\Delta)) = \max_{K \in M\Omega^{(Y,j)}} g^{(B)}_i(D_i, T_{ij}^{(re)}).$$

Позволяет определить наиболее опасные процессы комплексных возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(Y,j)}$ .

Минимальный коэффициент опасности ЦРФ СТС при отказе элемента  $x_i$  при реализации процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta)$  при функционировании регламента  $j$

$$Kdmin_i(K^{(B)}(\Delta)) = \min_{K \in M\Omega^{(Y,j)}} g^{(B)}_i(D_i, T_{ij}^{(re)}).$$

Позволяет определить наименее опасные процессы комплексных возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(Y,j)}$ . Эти коэффициенты также определяют границы опасности ЦРФ СТС при отказе элемента  $x_i$  при реализации процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(Y,j)}$  при функционировании регламента  $j$

$$\sigma Kd_i(K^{(B)}(\Delta)) = \max_{K \in M\Omega^{(Y,j)}} g^{(B)}_i(D_i, T_{ij}^{(re)}) -$$

$$\min_{K \in M\Omega^{(Y,j)}} g^{(B)}_i(D_i, T_{ij}^{(re)}).$$

Чтобы из количественной шкалы перейти в номинальную, зададим количество ранговых интервалов, уровней опасности (level of danger)  $h_i$  по коэффициенту опасности ЦРФ СТС. Тогда левая граница  $p$ -го уровня опасности  $\sigma_p Kd_i(K^{(B)}(\Delta))$  имеет границы  $p = 1, h_i$

$$\sigma_p^n Kd_i(K^{(B)}(\Delta)) = \min_{K \in M\Omega^{(y, j)}} g^{(B)}(D_i, T_{ij}^{(re)}) +$$

$$((p-1)[\sigma Kd_i(K^{(B)}(\Delta))/h_i + 1],$$

а правая

$$\sigma_p^n Kd_i(K^{(B)}(\Delta)) = \sigma_p^n Kd_i(K^{(B)}(\Delta)) + [\sigma Kd_i(K^{(B)}(\Delta))/h_i].$$

Таким образом, в  $p$ -класс опасности попадают те процессы комплексных возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(y, j)}$ , для которых

$$\sigma_p^n Kd_i(K^{(B)}(\Delta)) \leq Kd_i(K^{(B)}(\Delta)) \leq \sigma_p^n Kd_i(K^{(B)}(\Delta)).$$

По коэффициенту опасности могут быть ранжированы все системные элементы. В том числе могут быть формализованы следующие задачи:

– поиск наиболее опасного комплексного процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(y, j)}$  ЦРФ СТС при отказе заданного элемента  $x_i$  при функционировании регламента  $j$ ;

– поиск наиболее опасного комплексного процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(y, j)}$  ЦРФ СТС при отказе заданного элемента  $x_i$  при функционировании системы в режиме выполнения совместных регламентов;

– поиск наиболее опасного комплексного процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(y, j)}$  ЦРФ СТС при отказе заданного набора  $X_3$  элементов системы при функционировании регламента  $j$ ;

– поиск наиболее опасного комплексного процесса возмущений  $K^{(B)}(\Delta) \in M\Omega^{(y, j)}$  ЦРФ СТС при отказе заданного набора  $X_3$  элементов системы при ее функционировании в режиме выполнения совместных регламентов и т.д.

## 4. Заключение

В настоящей работе разработаны модели функционирования СТС на языке ориентированных графов.

Формализованы понятия и модели сценарной стойкости СТС.

Разработаны характеристики стойкости СТС.

Разработаны методы сценарного анализа стойкости для различных регламентов функционирования СТС.

Предложены сценарные методы оценки опасности функционирования СТС.

Указаны задачи оптимального мониторинга функционирования СТС.

При проектировании СТС особое внимание уделяется вопросам безопасности их функционирования, в том числе проблеме мониторинга состояния и функционирования системы, ее отдельных частей и взаимодействия с окружающей средой. Для этого используют датчики – устройства, регистрирующие различные параметры системы и окружающей среды и передающие информацию об этих параметрах оператору системы

или АСУ. С ростом размеров систем растет и количество датчиков и, как следствие, информационная нагрузка на оператора системы. Для снижения информационной нагрузки на оператора с сохранением достаточного уровня эффективности предлагается использовать методологию сценарного исследования в сочетании с методикой, предложенной в работе.

Укажем направления дальнейших исследований.

1) Поиск областей управления (воздействия) для заданных конфигураций допустимых комплексных воздействий.

2) Выделение характерных особенностей структуры системы на основе расчета базисных сценариев функционирования системы [4].

3) Выявление узлов уязвимости структуры системы.

4) Интеграция сценарного и индикаторного подходов [5].

6) Введение и обоснование применения новых средств сценарного исчисления [2].

## Литература

1. Б.В. Соколов, Р.М. Юсупов. Концептуальная и теоретико-множественная модель управления структурной динамикой космических средств // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. №5. – С. 17–25.

2. Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем. Кн. 1, 2 / Под редакцией чл.-корр. РАН В.Л. Шульца, д.т.н., проф. В.В. Кульбы Авторский коллектив: В.Л. Шульц, В.В. Кульба, Д.А. Кононов, С.А. Косяченко, А.Б. Шелков, И.В. Чернов – М.: Наука, 2012.

3. В.В. Кульба, Д.А. Кононов, И.В. Чернов, П.Е. Рошин, О.А. Шулигина. Сценарное исследование сложных систем: анализ методов группового управления / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении» – М.: ИПУ РАН, 2010. С.154-186.

4. Д.А. Кононов, С.А. Косяченко, В.В. Кульба. Формирование и анализ сценариев развития социально-экономических систем с использованием аппарата операторных графов // А и Т. № 1. 2007. С. 121-136.

5. В.В. Кульба, Д.А. Кононов, С.А. Косяченко, А.А. Кочкаров, Д.С. Сомов. Использование сценарного и индикаторного подходов для управления живучестью, стойкостью и безопасностью сложных технических систем / Научное издание. – М.: ИПУ РАН, 2011.

## Persistence of complex technical systems: scenario approach to the problem

D.A. Kononov, A.A. Kochkarov, N.O. Ponomarev

**Abstract.** The possibilities of the scenario approach for investigation of complex technical systems are considered. A new model of propagation of disturbances on the structure of the technical system caused by different kinds of threats is suggested. Concepts of scenario stability and survivability of complex technical system are formalized on the operator graph with different regulations of its operation. Scenario characteristics of the concepts are considered, including the danger coefficients.

# Критерии оценки качества сегментации изображений

А.В. Захаров, П.П. Кольцов<sup>1</sup>, Н.В. Котович,  
А.А. Кравченко<sup>2</sup>, А.С. Куцаев<sup>3</sup>, А.С. Осипов<sup>4</sup>

1 – доктор физико-математических наук, доцент, 2 – кандидат физико-математических наук, 3 – кандидат физико-математических наук, 4 – кандидат физико-математических наук

Качество сегментации оказывает значительное влияние на конечные результаты распознавания изображений, что предопределяет важность выбора алгоритма сегментации, максимально адекватного специфике решаемой задачи. К настоящему времени предложено множество критериев (аналитических и эмпирических, количественных и качественных), предназначенных для сравнительной оценки алгоритмов сегментации изображений. Данная статья посвящена количественным эмпирическим критериям оценки качества сегментации. Рассматриваются как критерии, для вычисления которых требуется эталонное сегментированное изображение, так и критерии, непосредственно оценивающие сегментацию, без сравнения с эталоном.

## 1. Введение

Под сегментацией изображения в литературе по компьютерному (машинному) зрению понимается разбиение изображения  $I$  на  $N$  непересекающихся областей  $R_i$ , однородных по некоторому признаку (например, уровень яркости, текстура, цвет) и существенно отличающихся по этому признаку от соседних областей [1, 2]:

$$\bigcup_{i=1}^N R_i = I,$$
$$R_i \cap R_j = \emptyset \text{ для } i, j=1, 2, \dots, N; i \neq j, \quad (1)$$
$$P(R_i) = TRUE \text{ для } i=1, 2, \dots, N,$$
$$P(R_i \cup R_j) = FALSE \text{ для смежных } R_i \text{ и } R_j,$$

где  $P(R_i)$  – предикат однородности, определенный на множестве пикселей, составляющих область  $R_i$ .

Сегментация является одним из важнейших этапов анализа изображения [3, 4]. Повышенный интерес научного сообщества к этой тематике выражается в огромном количестве публикаций, посвященных разработке, модернизации и применению различных алгоритмов сегментации изображений (для знакомства с состоянием дел в этой области компьютерного зрения можно использовать обзорные статьи [1, 5-7]). Причем, число таких публикаций с годами быстро растет. Так, если рассмотреть в качестве примера одну из крупнейших электронных научно-технических библиотек, поддерживаемую Институтом инженеров по электротехнике и электронике (*IEEE*) [8], то публикации, содержащие в названии, аннотации или в ключевых словах термин *image segmentation*, распределяются по времени своего выхода в свет следующим образом:

- 1970-79 гг. – 11 публикаций;
- 1980-89 гг. – 314;
- 1990-99 гг. – 3066;
- 2000-09 гг. – 9938.

В результате перед разработчиками систем компьютерного зрения встает непростая проблема выбора

наиболее адекватных их задачам алгоритмов из множества предложенных в литературе.

Вполне естественно, что существование такой проблемы вызвало появление исследований, посвященных сравнительному тестированию различных алгоритмов сегментации изображений. Основные отличия методик, применяемых в таких исследованиях, друг от друга:

- разные наборы тестовых изображений, отличающиеся как по типу изображений (реальные или синтезированные), так и по размеру, количеству, источникам (оригинальные изображения или из общедоступных БД) и т.д.;
- разные процедуры выбора оптимальных параметров алгоритмов;
- разные критерии оценки качества сегментации (количественные или качественные, использующие эталонное сегментированное изображение или нет).

Было уже сделано несколько попыток классифицировать методики оценки алгоритмов сегментации [9-13]. Приведем здесь предложенную в [13] классификацию, в соответствии с которой методики оценки делятся на:

1. субъективные
2. объективные
  - 2.1. системные
  - 2.2. прямые
    - 2.2.1. аналитические
    - 2.2.2. эмпирические
      - 2.2.2.1. контролируемые
      - 2.2.2.2. неконтролируемые (автоматические).

*Субъективные* (они же *визуальные*) – наиболее широко используемые методики оценки. Их основной недостаток, собственно, отражен в названии этого класса – оценка качества дается человеком, поэтому у разных экспертов эта оценка может кардинально отличаться. Рис. 1 иллюстрирует, насколько различны понятия об идеальной сегментации у разных людей. На нем представлены несколько реальных изображений и результаты их сегментации четырьмя экспертами (сегментированные изображения взяты из базы данных [14]).

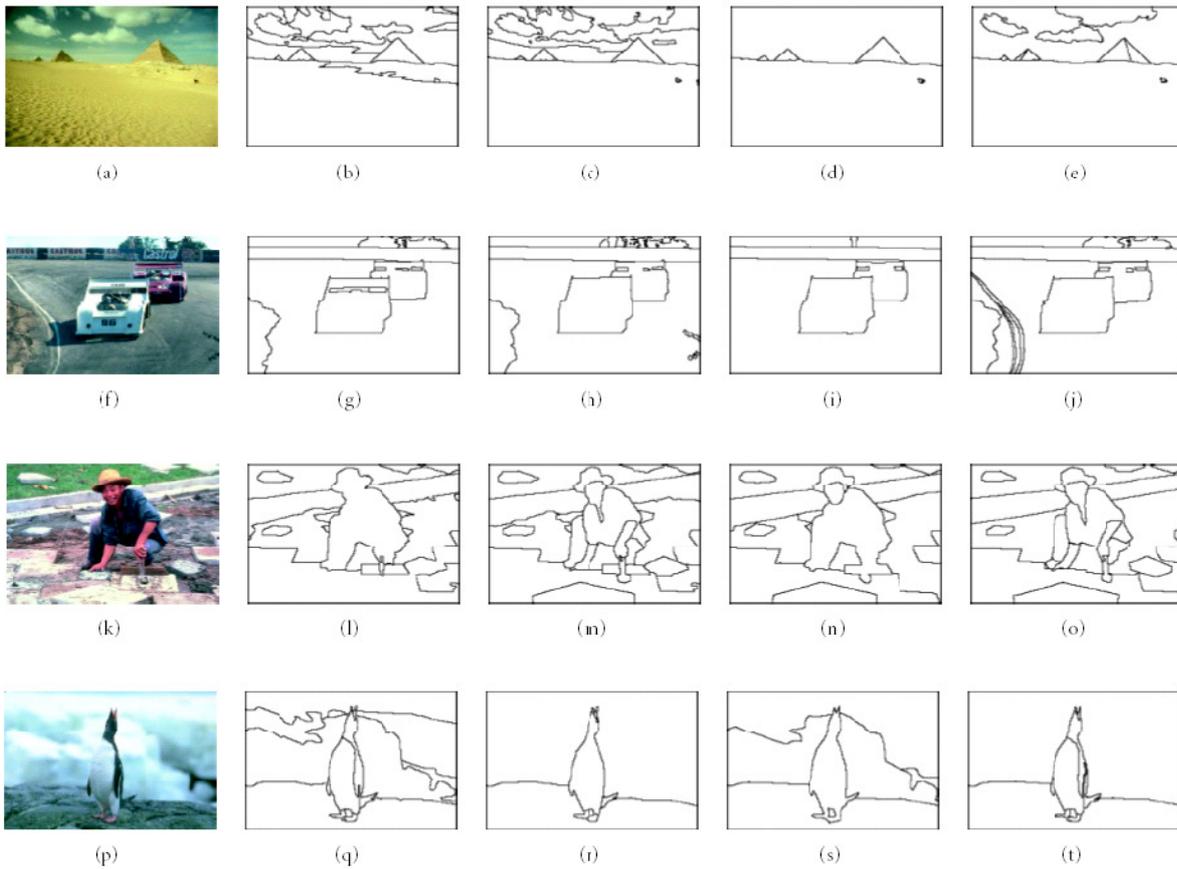


Рис. 1. «Идеальные» сегментации реальных изображений, сделанные четырьмя разными экспертами (из статьи [20])

*Объективные* методики, не использующие визуальные оценки, подразделяются на системные и прямые.

*Системные* методики дают оценку качеству сегментации на основе конечных результатов работы всей системы распознавания изображений. В качестве примера можно привести оценку работы разных детекторов границ на основе результатов распознавания объектов, выделенных на изображении [15]. Такая оценка не обязательно говорит о качестве сегментации, а может просто указывать на более подходящий результат для дальнейшей обработки. **Y.J.Zhang** и **J.J.Gerbrands** в статьях [16, 17] предлагали использование так называемого «измерения конечного результата». Если цель сегментации – получение характеристик выделяемого объекта, то точность в определении таких характеристик может служить в качестве оценки точности сегментации. Подобный подход предлагался и в работах [18, 19].

*Прямые* методики, имеющие дело непосредственно с самим алгоритмом сегментации или с результатами его работы, подразделяются на аналитические и эмпирические.

*Аналитические* методики рассматривают алгоритм независимо от его выхода [9, 21]. Изучаются такие свойства алгоритма, как стратегия сегментирования, сложность, возможность распараллеливания, ресурсоемкость и т.п. Эти свойства не имеют прямого отношения к качеству сегментации. Аналитические мето-

дики, рассматриваемые в литературе, имеют дело, в основном, с задачами специального вида (см., например, [22, 23]).

*Эмпирические* методики, напротив, оценивают не сам алгоритм, а результаты его работы на некотором наборе тестовых изображений. Они подразделяются на контролируемые и неконтролируемые (автоматические).

*Контролируемые (supervised)* методики часто называются в англоязычной литературе *discrepancy methods* [9], что, возможно, более точно соответствует их сути, так как они используют для оценки количественные меры различия результата работы алгоритма с некоторым эталонным результатом сегментации – *ground truth* изображением (также называемым *reference image* [9] и *gold standard* [24]). Такие методики дают очень хорошую оценку. Но создание эталонной сегментации для многих тестовых изображений (например, изображений реального мира) требует больших трудозатрат и вносит элемент субъективности.

В *автоматических (unsupervised)* методиках (другое название – *goodness methods* [9]) производится количественная оценка некоторых желаемых свойств сегментированного изображения, на основе чего делается вывод о качестве сегментации. Они не требуют наличия образца сегментации, что, возможно, является их основным достоинством. Это свойство позволяет

осуществлять контроль и самообучение в системах реального времени.

Одним из ключевых элементов методики сравнительного тестирования является используемый *критерий оценки качества* сегментации изображений (соответствующие английские варианты этого термина: *evaluation criterion, performance criterion, performance metric, performance measure, performance index* [11]).

Данная статья посвящена *количественным эмпирическим* критериям оценки.

Перед тем, как рассматривать предложенные в литературе количественные меры для оценки сегментации, необходимо определить, каким же требованиям должно соответствовать сегментированное изображение? **Haralick** и **Shapiro** [7] сформулировали четыре основных признака «хорошей» сегментации:

- 1) сегменты должны быть однородными по некоторым характеристикам (например, по яркости или текстуре);
- 2) соседние сегменты должны значительно отличаться по этим характеристикам;
- 3) внутри сегмента не должно быть большого количества мелких «дырок»;
- 4) границы сегментов должны быть гладкими и иметь точную пространственную локализацию.

В большинстве случаев именно этим качественным признакам исследователи и пытаются сопоставить некоторые количественные критерии оценки сегментации изображений.

В литературе выделяются два основных подхода к сегментации изображений:

- 1) разделение изображения контурами на области со сходными характеристиками (в английской терминологии – *edge-based methods* [25] (*boundary-based* [6], *contour-based* [26]));
- 2) объединение пикселей изображения в группы на основе близости некоторых количественных признаков (*region-based methods* [25]).

Для оценки результатов работы алгоритмов, относящихся к первой группе, используются, в основном, те же критерии, что и для детекторов границ (*edge detectors*). Они обсуждались в нашей предыдущей статье [27].

Критерии оценки, используемые для алгоритмов сегментации, относящихся ко второй группе, описываются в данной статье. Раздел 2 посвящен критериям, для вычисления которых требуется эталонное сегментированное изображение, в разделе 3 рассмотрены критерии, оценивающие сегментацию непосредственно, без сравнения с эталоном.

## 2. Критерии, основанные на сравнении с эталонной сегментацией

Критерии качества сегментации, используемые в контролируемых методиках оценки алгоритмов сегментации дают количественную меру различия результата работы алгоритма с эталонной сегментацией, созданной экспертом вручную или полученной автоматически при генерации синтетического изображения (если методика оценки предполагает использование тако-

го типа изображений). Большая часть таких критериев может быть отнесена к одной из пяти основных групп, в зависимости от того, какие из ниже перечисленных характеристик используются для вычисления меры различия [11]:

- количество пикселей, отнесенных при сегментации не к своему сегменту (процесс сегментации можно рассматривать как классификацию пикселей исходного изображения, поэтому будем далее говорить о «неправильно классифицированных пикселах»);
- месторасположение таких пикселей на эталонном изображении относительно сегмента, к которому они были ошибочно отнесены при сегментации;
- степень фрагментации эталонного и результирующего изображений;
- значения используемых для дальнейшего анализа изображения характеристик сегментов, полученные на эталонном и результирующем изображениях;
- отличие значений характеристик исходного изображения в данном пикселе от репрезентативных значений для сегмента, к которому этот пиксел отнесен.

Далее в данном разделе будут подробно рассмотрены критерии, являющиеся наиболее типичными представителями этих пяти групп.

### 2.1. Количество неправильно классифицированных пикселей

Самая простая и естественная мера качества сегментации, которую сразу же начали использовать исследователи, занимавшиеся сегментацией изображений – это процент неправильно классифицированных пикселей (см., например, статьи [28, 29]). Однако у этого критерия быстро обнаружились явные недостатки:

- иногда результаты сегментации, явно лучшие с точки зрения экспертов, имели более высокий процент ошибочно классифицированных пикселей;
- не учитывалось расположение ошибочных пикселей относительно соответствующего сегмента – очевидно, что ошибка на границе и ошибка в центре сегмента должны штрафовать по разному;
- не учитывалось различие в важности отдельных участков изображения для сегментации – ошибки для разных сегментов изображения должны иметь разный вес;
- отсутствовала информация о том, какой класс пикселей вносил наибольшую ошибку.

Для решения последних двух проблем **Yasnoff** с соавторами [30] предложили два критерия, являющиеся обобщением для случая нескольких классов ошибок 1-го и 2-го рода, используемых в задачах бинарной классификации.

Оба критерия основаны на построении матрицы неточностей (*confusion matrix*). Столбец этой матрицы соответствует классу, к которому пиксели принадле-

Таблица 1. Пример матрицы неточностей (из статьи [30]).

	<b>BK</b>	<b>PA</b>	<b>RD</b>	<b>CY</b>	<b>NU</b>	<b>Total</b>
<i>BK</i>	<b>909</b>	2		2		913
<i>PA</i>						
<i>RD</i>			<b>111</b>	10		121
<i>CY</i>	37	3	67	<b>802</b>	1	910
<i>NU</i>				87	<b>419</b>	506
<i>Total</i>	946	5	178	901	420	

жат на самом деле, а строка – классу, к которому пиксели отнесены при сегментации. Таким образом, правильно классифицированные пиксели относятся к элементам матрицы, находящимся на главной диагонали, неправильно классифицированные – ко всем остальным.

В таблице 1 представлен пример матрицы неточностей, построенной при анализе результата сегментации микроскопического изображения клеток крови. В частности, видно, что из 178 пикселей, относящихся к красным кровяным тельцам (класс RD), правильно классифицированы только 111, а 67 отнесены к цитоплазме (класс CY); в свою очередь, 10 пикселей, принадлежащих на эталоне к классу CY, ошибочно причислены к классу RD.

Первый из предложенных критериев – это процентное отношение неправильно классифицированных пикселей данного  $k$ -го класса к общему количеству пикселей этого класса на эталонном изображении:

$$M_1^k = \frac{\left( \sum_{i=1}^n C_{ik} \right) - C_{kk}}{\sum_{i=1}^n C_{ik}} \times 100, \quad (2)$$

где  $n$  – количество классов,

$C_{kk}$  – количество правильно классифицированных пикселей  $k$ -го класса,

$\sum_{i=1}^n C_{ik}$  – количество пикселей, в действительности принадлежащих к  $k$ -му классу.

Второй критерий – это процентное отношение пикселей, ошибочно причисленных к данному  $k$ -му классу, к общему количеству пикселей других классов на эталонном изображении:

$$M_2^k = \frac{\left( \sum_{i=1}^n C_{ki} \right) - C_{kk}}{\left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik} \right) - \sum_{i=1}^n C_{ik}} \times 100, \quad (3)$$

где  $\sum_{i=1}^n C_{ki}$  – количество пикселей, отнесенных к  $k$ -му классу при сегментации,

$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik}$  – общее количество пикселей на изображении,

$n$ ,  $C_{kk}$ ,  $\sum_{i=1}^n C_{ik}$  имеют тот же смысл, что и в (2).

Таким образом, при наличии  $n$  сегментов изображения получаем  $2n$  критериев  $M_1^k$ ,  $M_2^k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , позволяющих проанализировать вклад каждого сегмента в общую ошибку. Кроме того, элементы матрицы неточностей могут быть взвешены с целью учесть разную значимость ошибок для разных сегментов изображения.

Lee с соавторами в статье [31], посвященной сравнительной оценке производительности пороговых методов сегментации, предложили критерий, также основанный на подсчете неправильно классифицированных пикселей и названный ими вероятностью ошибки сегментации (*probability of error*).

Пороговые методы делят изображение на две области – объект  $o$  и фон  $b$ . Если рассматривать сегментацию изображения как стохастический процесс, а значения интенсивности пикселей как случайные величины, то вероятность  $p_s(o)$  того, что пиксел исходного изображения будет отнесен на сегментированном изображении  $\hat{M}$  к объекту (см. Рис. 2), может быть представлена следующим образом [32]:

$$p_s(o) = p(o)p(o|o) + p(b)p(o|b), \quad (4)$$

где  $p(o)$ ,  $p(b)$  – вероятности того, что случайным образом выбранный пиксел исходного изображения принадлежит объекту или, соответственно, фону; так как пиксел в обязательном порядке принадлежит либо объекту, либо фону, то  $p(o) + p(b) = 1$ ,

$p(o|o)$  – вероятность того, что пиксел, принадлежащий объекту, будет при сегментации также отне-

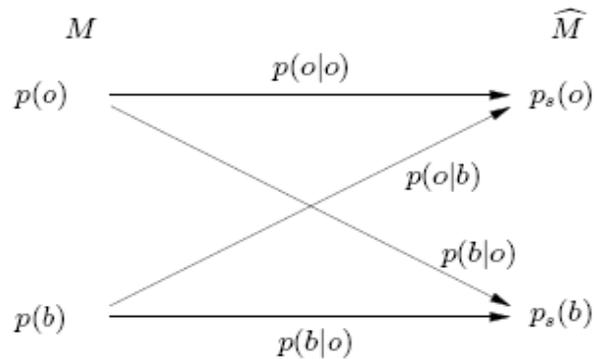


Рис. 2. Стохастическая модель сегментации изображения на объект  $o$  и фон  $b$  (из статьи [32])

сен к объекту,

$p(o|b)$  – вероятность того, что пиксел, принадлежащий фону, будет при сегментации ошибочно отнесен к объекту.

Аналогично, для вероятности  $p_s(b)$  того, что пиксел в процессе сегментации будет отнесен к фону, имеем:

$$p_s(b) = p(b)p(b|b) + p(o)p(b|o), \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) вторые слагаемые соответствуют ошибочной сегментации. Их сумма дает вероятность ошибки сегментации  $p(err)$  для всего изображения в целом:

$$p(err) = p(o)p(b|o) + p(b)p(o|b). \quad (6)$$

В статье [33] **Lim** и **Lee** обобщили этот критерий на случай произвольного числа сегментов:

$$P(err) = \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r P(R_j)P(R_i | R_j), \quad (7)$$

где  $P(R_j)$  – вероятность того, что случайно выбранный пиксел исходного изображения принадлежит сегменту  $R_j$ ,

$P(R_i | R_j)$  – вероятность ошибочного отнесения в процессе сегментации пиксела из сегмента  $R_j$  к сегменту  $R_i$ ,

$r$  – количество сегментов на результирующем изображении.

Величина  $P(R_j)$  рассматривается здесь в качестве априорной вероятности, которую можно оценить по эталонной сегментации, как отношение площади сегмента  $R_j$  к размеру всего изображения. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^r P(R_j) = 1. \quad (8)$$

Для апостериорной вероятности  $P(R_i | R_j)$  приемлемой оценкой, в соответствии с [34], будет отношение

количества пикселов сегмента  $R_j$ , ошибочно причисленных к  $R_i$  на сегментированном изображении, к площади сегмента  $R_j$  на эталонном изображении.

Диапазон значений критерия  $P(err)$ : от 0 (идеальная сегментация) до 1.

## 2.2. Месторасположение неправильно классифицированных пикселов

Критерии оценки, рассмотренные в предыдущем разделе, основаны только на подсчете количества неправильно классифицированных пикселов и не учитывают взаимного расположения такого пиксела и сегмента, к которому он был ошибочно отнесен. Понятно, что чем больше расстояние между ними на эталонном изображении, тем значительнее такая ошибка должна штрафовать.

Первыми критерий, основанный на таком подходе, (*pixel distance error*) предложили **Yasnoff** с соавторами в уже упоминавшейся выше работе [30]:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N d_i^2}}{A} \times 100, \quad (9)$$

где  $N$  – количество ошибочно классифицированных пикселов,

$A$  – общее количество пикселов в изображении,

$d_i$  – евклидово расстояние между  $i$ -ым ошибочно классифицированным пикселом  $x$  и ближайшим пикселом  $y$ , действительно относящимся к данному классу (см. Рис. 3).

Критерий  $\varepsilon$  может быть вычислен для всех вариантов ошибок (пиксел  $i$ -го класса ошибочно отнесен к  $j$ -му) и представлен в виде матрицы  $K \times K$ , где  $K$  – число классов. Элементы матрицы могут быть взвешены с целью учесть разную значимость разных вариантов ошибок.

Интервал значений, которые принимает  $\varepsilon$ : от 0

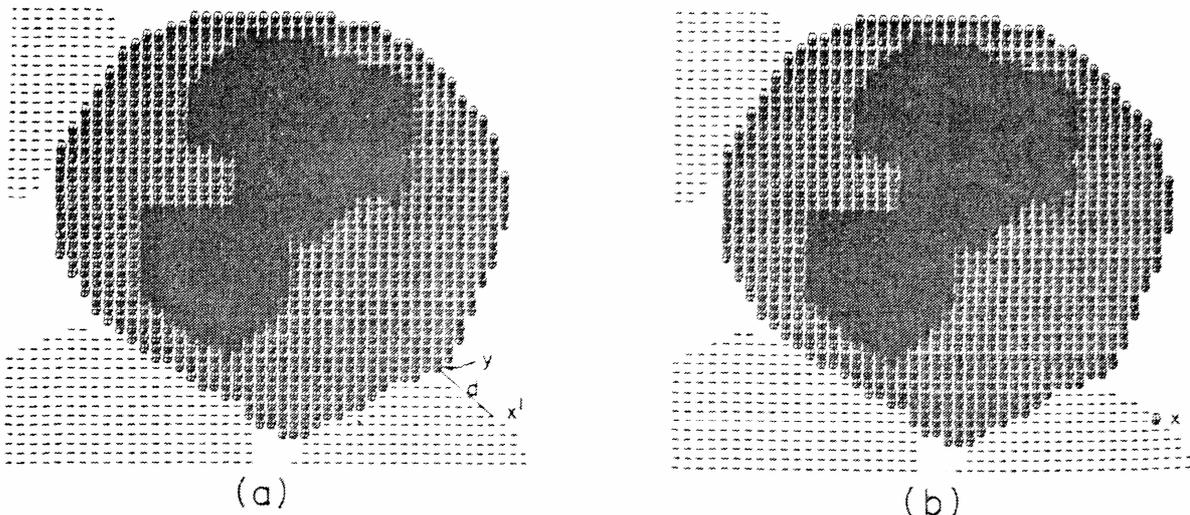


Рис. 3. (a) – эталонная сегментация; (b) – реальная сегментация с единственным неправильно классифицированным пикселом  $x$  (из статьи [30])

(при идеальной сегментации) до  $\mathcal{E}_{\max}$ , зависящего от размерности изображения  $n$  (приведенные формулы верны для квадратного изображения  $n \times n$ ):

$$\mathcal{E}_{\max} = \begin{cases} 100\sqrt{\frac{7}{6} - \frac{3}{2n} + \frac{1}{3n^2}}, & \text{если } n \text{ четное} \\ 100\sqrt{\frac{7}{6} - \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2n^3}}, & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases} \quad (10)$$

$\mathcal{E}_{\max} \rightarrow 108$  при  $n \rightarrow \infty$ , причем уже при достаточно небольших размерах изображения достигает значений, близких к предельным (например, при  $n = 200$   $\mathcal{E}_{\max} \approx 107.7$ ).

**Strasters** и **Gerbrands** [35] адаптировали для целей оценки качества сегментации критерий Прэтта (*figure of merit*) [36], предназначенный для оценки производительности детекторов границ (*edge detectors*). Введенные ими меры качества сегментации  $FOM$  и  $FOM_e$ , так же, как и рассмотренный выше критерий  $\mathcal{E}$ , основаны на определении того, насколько далеко данный пиксел отстоит от «правильного» местоположения пикселей его класса (см. Рис. 3):

$$FOM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \gamma d_i^2}, \quad (11)$$

где  $N$  – число пикселей в изображении,

$d_i$  – расстояние  $i$ -го пиксела изображения до ближайшего пиксела, отнесенного к тому же классу на эталонном изображении,

$\gamma$  – масштабный множитель.

При полностью корректной сегментации  $FOM=1$ . На практике большинство элементов изображения от-

$$FOM_e = \begin{cases} \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{1 + \gamma d_i^2}, & N_e > 0 \\ 1, & N_e = 0 \end{cases} \quad (12)$$

### 2.3. Степень фрагментации изображения

При хорошей сегментации эталонное и результирующее изображения должны иметь одинаковую степень фрагментации, то есть количество сегментов на них должно совпадать (или почти совпадать).

**Strasters** и **Gerbrands** [35] для оценки степени фрагментации изображения предложили использовать следующую меру:

$$FRAG = \frac{1}{1 + |\alpha(n_R - n_I)|^\beta}, \quad (13)$$

где  $n_R$  – количество сегментов на результирующем изображении,

$n_I$  – количество сегментов на эталонном изображении,

$\alpha, \beta$  – масштабные параметры.

Чем ближе значение меры фрагментации к 1, тем выше оценка качества сегментации. Параметр  $\alpha$  определяет вклад величины  $(n_R - n_I)$  в значение  $FRAG$ , а параметр  $\beta$  определяет насколько сильно штрафуются большие отклонения  $n_R$  от  $n_I$ , по сравнению с малыми. Сами авторы использовали в своих экспериментах следующие значения масштабных параметров:  $\alpha=0.16, \beta=2$ .

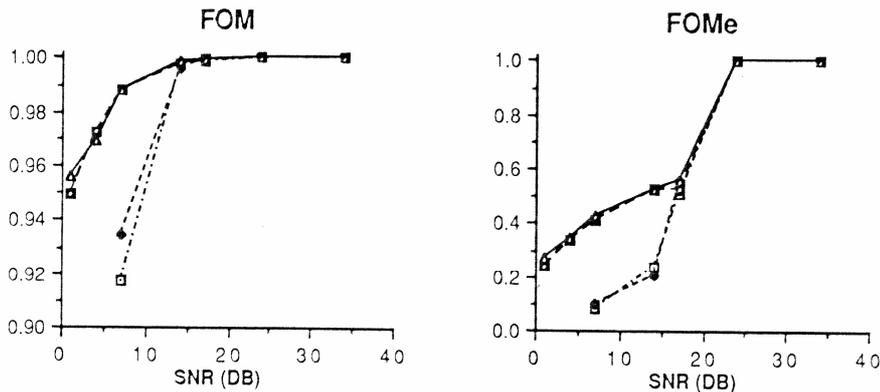


Рис. 4. Оценка результатов работы 4-х методов сегментации с помощью критериев  $FOM$  и  $FOM_e$  для разных значений отношения сигнала к шуму (SNR) (из статьи [35])

носятся при сегментации к правильной области, и значения  $FOM$  попадают в довольно узкий интервал, близкий к 1 (см. Рис. 4). Чтобы увеличить этот интервал и, тем самым, повысить степень наглядности сравнительной оценки разных алгоритмов, дающих хорошую сегментацию, при вычислении меры качества можно принимать во внимание только ошибочно классифицированные пиксели  $N_e$ :

### 2.4. Точность определения характеристик сегментов

Сегментация является начальным этапом анализа изображения. Её цель – представить изображение в виде, удобном для определения его количественных характеристик, используемых в дальнейшем для ана-

лиза этого изображения [37]. С этой точки зрения, логично оценивать качество сегментации по тому, насколько точно (по сравнению с эталонным изображением) можно на сегментированном изображении определить такие характеристики.

**Y.J.Zhang** и **Gerbrands** [17] предложили два критерия, основанных на таком подходе – *AUMA* (*absolute ultimate measurement accuracy*) и *RUMA* (*relative ultimate measurement accuracy*):

$$AUMA_f = |R_f - S_f|, \quad (14)$$

$$RUMA_f = \frac{|R_f - S_f|}{R_f} \times 100, \quad (15)$$

где  $R_f$  – значение признака  $f$ , полученное на эталонном изображении,

$S_f$  – значение признака  $f$ , полученное на сегментированном изображении.

По существу, мы имеем не 2, а  $2N$  критериев оценки, где  $N$  – количество выделяемых признаков. Очевидно, что чем ближе значения *AUMA* и *RUMA* к нулю, тем выше оценка качества сегментации.

**Y.J.Zhang** в работе [38] исследовал несколько вариантов критерия *RUMA*, использующих различные геометрические признаки сегментов изображения (площадь, периметр, эксцентриситет и др.). Одно и тоже тестовое изображение было разделено на области объекта и фона с использованием различных значений порога сегментации (ось абсцисс на Рис. 5). Таким образом, был получен набор результирующих изображе-

основанный на вычислении площади сегмента.

## 2.5. Значения характеристик исходного изображения, используемых для сегментации

Рассмотренные ранее критерии не учитывали информацию о значениях использовавшихся при сегментации характеристик изображения, полученных для классифицируемых пикселей. **Strasters** и **Gerbrands** в уже упоминавшейся работе [35] ввели критерий *FOC* (*figure of certainty*), при вычислении которого такая информация, а именно интенсивность, используется:

$$FOC = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + |\psi(f_i - \mu_j)|^\delta}, \quad (16)$$

где  $N$  – количество пикселей в изображении,

$f_i$  – значение интенсивности пиксела  $i$  исходного изображения,

$\mu_j$  – репрезентативное значение интенсивности  $j$ -го сегмента, к которому  $i$ -й пиксел был отнесен при сегментации,

$\psi, \delta$  – масштабные параметры.

В простейшем случае, когда исходное изображение состоит из нескольких областей постоянной интенсивности, выражение  $(f_i - \mu_j)$  представляет собой разность интенсивностей того сегмента, к которому  $i$ -й пиксел принадлежит на самом деле, и того, к которому он был отнесен в процессе сегментации. Таким образом, ошибка при сегментации штрафует тем больше, чем

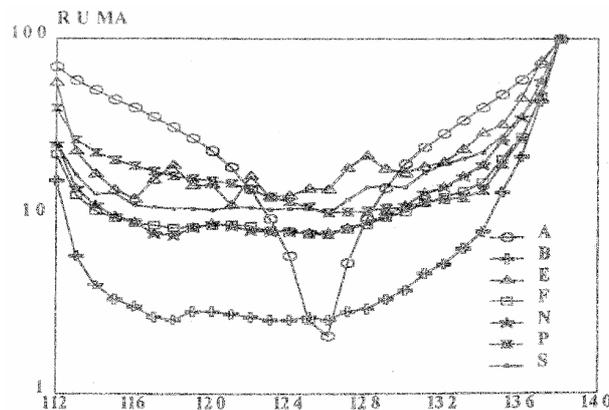


Рис. 5. Характер зависимости различных вариантов критерия *RUMA* от изменения параметра алгоритма сегментации

ний, отличающихся качеством сегментации, и для каждого из таких изображений было вычислено по семь вариантов критерия *RUMA*. На Рис. 5 видно, что для разных вариантов *RUMA* минимальным значениям критерия (то есть, наивысшей оценке сегментации) соответствуют, вообще говоря, разные сегментированные изображения, то есть, нет однозначно лучшей, в соответствии со всеми семью критериями, сегментации. Самым же чувствительным к качеству сегментации (то есть, наиболее быстро меняющимся вблизи минимального значения) оказался вариант критерия,

значительнее такая разность. При идеальной сегментации  $FOC=1$ .

В более общем случае, когда изображение содержит неоднородные по интенсивности области и сегментация осуществляется на основе некоторого признака  $F$ ,  $f_i$  будет значением этого признака в пикселе  $i$ , а в качестве  $\mu_j$  можно использовать среднее значение признака  $F$  для  $j$ -го сегмента.

Масштабные параметры  $\psi$  и  $\delta$  имеют тот же смысл, что и параметры  $\alpha$  и  $\beta$  в (13).

### 3. Критерии, не требующие наличия эталонной сегментации

Автоматические (неконтролируемые) методики оценки алгоритмов сегментации базируются не на сравнении полученного сегментированного изображения с эталонной сегментацией, а на субъективных представлениях о том, какими свойствами должна обладать «хорошая сегментация». Собственно говоря, на количественную оценку таких желаемых свойств критерии, используемые в этих методиках, и направлены.

Отсутствие необходимости в эталонном изображении позволяет оценивать работу алгоритмов сегментации в режиме онлайн, что делает возможным, например, «на лету» настраивать параметры алгоритма в зависимости от оценки промежуточных результатов или определять, когда можно остановить итеративный процесс сегментации, достигнув некоего желаемого уровня качества.

Можно выделить четыре основные группы автоматических критериев, ориентированных на количественную оценку определенных свойств сегментированного изображения [11]:

- однородность сегментов;
- контраст между соседними сегментами;
- форма сегментов;
- комплексная оценка количества сегментов и их однородности.

Рассмотрим более подробно наиболее популярные автоматические критерии.

#### 3.1. Однородность сегментов

**Levine** и **Nazif** [39] предложили для определения качества сегментации использовать критерий, учитывающий однородность получившихся сегментов (*uniformity measure*). Он основан на вычислении дисперсии величины соответствующего признака изображения, используемого для сегментации.

Пусть  $f_i$  – значение рассматриваемого признака  $F$  в пикселе  $i$ . Тогда дисперсия признака  $F$  для сегмента изображения  $R_j$  определяется следующим образом:

$$\sigma_j^2 = \sum_{i \in R_j} (f_i - \bar{f}_j)^2 / A_j, \quad (17)$$

$$\text{где } \bar{f}_j = \sum_{i \in R_j} f_i / A_j,$$

$A_j$  – площадь сегмента  $R_j$ .

Мера однородности области  $\Omega$ , состоящей из сегментов  $R_j$ , задается следующей формулой:

$$U_\Omega = 1 - \sum_{R_j \in \Omega} w_j \sigma_j^2 / N, \quad (18)$$

где  $w_j$  – вес, определяющий вклад сегмента  $R_j$  в  $U_\Omega$ ,

$$N = \sigma_{\max}^2 \sum_{R_j \in \Omega} w_j - \text{нормировочный множитель,}$$

$$\sigma_{\max}^2 = \frac{1}{2} (f_{\max} - f_{\min})^2,$$

$f_{\max}, f_{\min}$  – максимальное и минимальное значения признака  $F$  в области  $\Omega$ .

Меру однородности можно использовать в качестве динамического критерия качества сегментации. Скажем, в итерационных схемах сегментации типа разделение-слияние (*split-and-merge*) (см., например, [40, 41]) процесс можно останавливать по достижении заданного значения  $U_\Omega$ . Так как не все сегменты претерпевают изменения на каждой итерации, можно пересчитывать только вклад от изменившихся сегментов. Для этого удобно, приняв за вес  $w_j$  площадь сегмента

$A_j$ , представить формулу (18) в виде:

$$U_\Omega = 1 - \sum_{R_j \in \Omega} u_j, \quad (19)$$

где  $u_j = A_j \sigma_j^2 / A_\Omega \sigma_{\max}^2$  – вклад сегмента  $R_j$  в  $U_\Omega$ ,

$$A_\Omega = \sum_{R_j \in \Omega} A_j - \text{площадь области } \Omega, \text{ состоящей из}$$

сегментов  $R_j$ .

**Sahoo** с соавторами [42] адаптировали меру однородности (18) для оценки сегментации, полученной пороговыми методами, дающими бинарное изображение:

$$U = 1 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{C}, \quad (20)$$

$$\text{где } \sigma_j^2 = \sum_{i \in R_j} (f_i - \bar{f}_j)^2,$$

$f_i$  – уровень интенсивности для пиксела  $i$ ,

$\bar{f}_j$  – средняя интенсивность по сегменту  $R_j$ ,

$$C = \frac{1}{2} (f_{\max} - f_{\min})^2 - \text{нормировочный множитель.}$$

#### 3.2. Контраст между сегментами

В той же работе [39] **Levine** и **Nazif** предположили, что хорошая сегментация, кроме однородности самих получившихся сегментов, должна характеризоваться высоким контрастом между соседними сегментами (*contrast measure*):

$$c_{ij} = \frac{|\bar{f}_i - \bar{f}_j|}{\bar{f}_i + \bar{f}_j}, \quad (21)$$

где  $\bar{f}_i, \bar{f}_j$  – средние значения признака  $F$  в сегментах  $R_i$  и  $R_j$  соответственно.

Интервал изменения величины  $c_{ij}$ : от 0 до 1. Чем ближе к 1, тем выше контраст между соседними сегментами.

Мера контраста  $c_j$  для сегмента  $R_j$  представляет собой взвешенную сумму значений контраста между этим сегментом и всеми его соседями  $R_i$ :

$$c_j = \sum_{R_i} p_{ij} c_{ij}, \quad (22)$$

где  $p_{ij}$  – «коэффициент смежности» сегментов  $R_i$  и  $R_j$ , представляющий собой, в соответствии с [43], отношение длины общей части границы сегментов к периметру рассматриваемого сегмента  $R_j$ . Очевидно, что

$$\sum_{R_i} p_{ij} = 1. \quad (23)$$

Мера контраста  $C_\Omega$  для области  $\Omega$ , состоящей из сегментов  $R_j$ , выражается через локальные меры  $c_j$  для соответствующих сегментов следующим образом:

$$C_\Omega = \sum_{R_j \in \Omega} w_j c_j / \sum_{R_j \in \Omega} w_j, \quad (24)$$

где  $w_j$  – вес, определяющий вклад сегмента  $R_j$  в  $C_\Omega$ .

Веса  $w_j$  зависят от размеров сегментов, правда, в отличие от случая меры однородности, зависимость эта уже нелинейна. **Levine** и **Nazif** предложили учитывать при выборе весов известный из работ по физиологии человеческого зрения эффект зависимости контрастной чувствительности глаза от пространственной частоты стимула (см., например [44]). Утверждается, что существует оптимальный размер сегмента, при котором отсегментированное изображение воспринимается, как наиболее контрастное. Таким образом, сегменты, имеющие близкий к оптимальному размер, дают наибольший вклад в контраст изображения, а слишком маленькие и слишком большие сегменты – наименьший. Если приближенно представить график зависимости веса  $w_j$  от размера сегмента в виде нормальной кривой с параметрами  $\mu, \sigma$  (см. Рис. 6), то

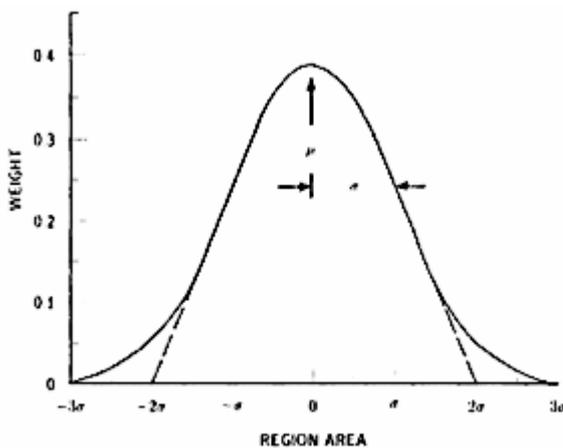


Рис. 6. Вес как функция площади сегмента (из статьи [39])

выражение для веса  $w_j$  можно записать в виде:

$$w_j = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(A_j - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (25)$$

где  $A_j$  – оптимальная площадь сегмента  $R_j$ .

### 3.3. Форма сегментов

**Sahoo** с соавторами в работе [42] предложили также меру формы (*shape measure*), предназначенную для количественной оценки геометрических свойств получаемых сегментов. Как правило, эту меру используют для оценки производительности пороговых техник сегментации, позволяющих отделить объекты от фона (см., например, [31, 45]).

Сначала для каждого пиксела исходного изображения, который при сегментации был отнесен к объекту  $A$ , вычисляется значение обобщенного градиента  $\Delta(x, y)$ :

$$\Delta(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^4 D_k^2 + \sqrt{2}D_1(D_3 + D_4) - \sqrt{2}D_2(D_3 - D_4)}, \quad (26)$$

где  $D_1 = f(x+1, y) - f(x-1, y)$ ,

$$D_2 = f(x, y-1) - f(x, y+1),$$

$$D_3 = f(x+1, y+1) - f(x-1, y-1),$$

$$D_4 = f(x+1, y-1) - f(x-1, y+1),$$

$f(x, y)$  – уровень интенсивности для пиксела  $(x, y)$ .

Затем вычисляется мера формы  $S_A$  для объекта  $A$  по следующей формуле:

$$S_A = \frac{\sum_{(x,y) \in A} \text{Sgn}(f(x,y) - \bar{f}_N) \Delta(x,y) \text{Sgn}(f(x,y) - T)}{C_A}, \quad (27)$$

где  $\bar{f}_N = \frac{1}{8} \left( \sum_{i=x-1}^{x+1} \sum_{j=y-1}^{y+1} f(i,j) - f(x,y) \right)$  – среднее

значение интенсивности в окрестности  $N(x, y)$  пиксела  $(x, y)$ ,

$T$  – значение порога, использовавшееся при сегментации,

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases},$$

$$C_A = \max \left\{ \sum_{(x,y) \in A} \text{Sgn}(f(x,y) - \bar{f}_N) \Delta(x,y) \text{Sgn}(f(x,y) - T) \right\}$$

Интервал изменения величины  $S_A$ : от 0 до 1. Чем ближе к 1, тем выше оценка качества сегментации.

### 3.4. Комплексные критерии

Одним из часто встречающихся недостатков алгоритмов сегментации является выделение большого

числа мелких «мусорных» областей на изображении. Liu и Yang [46] предложили комплексный критерий, учитывающий как однородность сегментов, так и их количество:

$$F = \frac{1}{1000N} \sqrt{R} \sum_{i=1}^R \frac{e_i^2}{\sqrt{A_i}}, \quad (28)$$

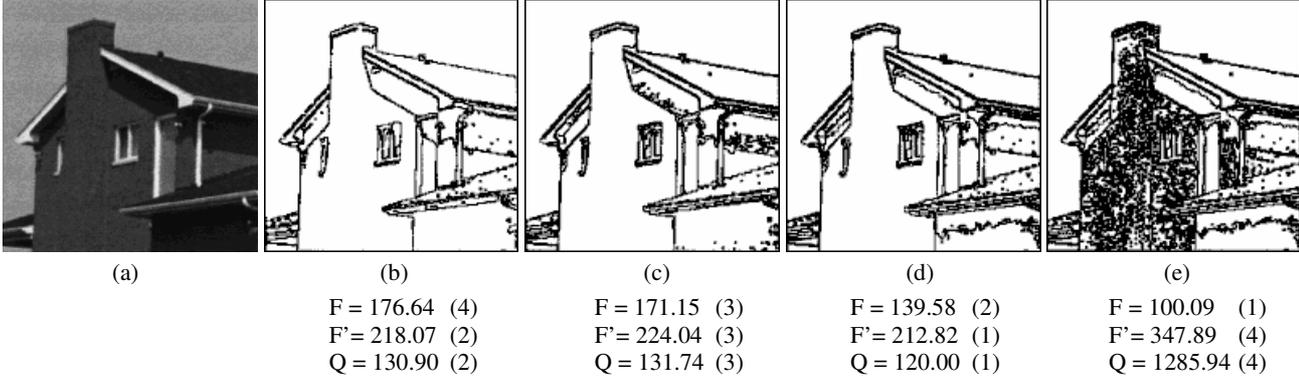


Рис. 7. Исходное изображение (а) и варианты его сегментации (b)-(e). Для каждого сегментированного изображения приведены значения критериев  $F$ ,  $F'$ ,  $Q$  и места в рейтинге качества сегментации в соответствии с данным критерием (из статьи [49])

где  $N$  – количество пикселей на изображении,  
 $R$  – количество сегментов,  
 $A_i$  – площадь  $i$ -го сегмента,  
 $e_i$  – величина, характеризующая степень однородности  $i$ -го сегмента.

Liu и Yang использовали критерий  $F$  для оценки качества работы своего метода сегментации цветных изображений, и, соответственно, величина  $e_i$  выступала у них в качестве меры цветовой однородности  $i$ -ой выделенной области. Вычислялась эта величина как сумма евклидовых расстояний в цветовом пространстве между цветами пикселей исходного изображения, отнесенных при сегментации к  $i$ -ой выделенной области, и цветом, поставленным в соответствие этой области в ходе сегментации (а именно, цветом центра соответствующего кластера в цветовом пространстве).

В общем случае,  $e_i$  можно представить следующим образом:

$$e_i = \sum_{n=1}^{A_i} \sqrt{\sum_{k=1}^K (g_n^{(k)} - \hat{g}_i^{(k)})^2}, \quad (29)$$

где  $K$  – размерность вектора признаков, используемого для сегментации изображения,

$g_n^{(k)}$  – значение  $k$ -ой компоненты этого вектора для  $n$ -го пикселя исходного изображения, отнесенного при сегментации к  $i$ -му сегменту,

$\hat{g}_i^{(k)}$  –  $k$ -я компонента вектора признаков, поставленного в соответствие  $i$ -му сегменту в процессе сегментации,

$A_i$  – площадь  $i$ -го сегмента.

Очевидно, что чем меньше значение критерия  $F$ , тем выше оценивается качество сегментации. Сомножитель  $\sqrt{R}$  в формуле штрафует сегментацию, содержащую слишком много областей. Снижение оценки

за наличие мелких сегментов достигается введением величины  $1/\sqrt{A_i}$ , а  $e_i$ , как уже отмечалось выше, обеспечивает штраф за неоднородность сегментов.

Использование критерия  $F$  выявило некоторые его изъяны [47]. Так, оказалось, что наличие множества мелких сегментов штрафуются недостаточно. На Рис. 7 представлены четыре различные сегментации исходно-

го изображения «Дом» (использовался один и тот же алгоритм кластеризации с избирательной выборкой данных (*competitive learning*) [48] при разных значениях параметров). Очевидно, что наихудшее качество у сегментированного изображения, представленного на Рис. 7е, между тем, именно ему соответствует наименьшее (т.е. наилучшее в смысле оценки качества сегментации) значение критерия  $F$ .

Borsotti с соавторами [49] предложили два критерия, представляющие собой модернизированные варианты критерия  $F$ .

Сначала они повысили наказание за наличие множества именно *мелких* областей на сегментированном изображении, заменив в (28) член  $\sqrt{R}$ , штрафующий просто за количество сегментов, независимо от их размера:

$$F' = \frac{1}{1000N} \sqrt{\sum_{A=1}^{Max} [R(A)]^{1+1/A}} \sum_{i=1}^R \frac{e_i^2}{\sqrt{A_i}}, \quad (30)$$

где  $R(A)$  – количество сегментов, имеющих площадь  $A$ , а  $Max$  – площадь самой большой области на сегментированном изображении.

Введение показателя степени  $1+1/A$  позволяет повысить вклад в величину критерия  $F'$  сегментов с маленькими площадями  $A$ . Когда количество мелких сегментов невелико, модернизированный член в формуле (30) близок к  $\sqrt{R}$ , а критерии  $F'$  и  $F$  близки по своим значениям (см., например, Рис. 7d).

Эксперименты с применением критерия  $F'$  показали, что получился, все же, некоторый перекоп в сторону большего влияния на оценку сегментации наличия мелких регионов по сравнению со степенью неоднородности сегментов. Два визуально близких по качеству сегментации изображения, отличающиеся только сравнительно небольшим количеством малых «му-

сорных» сегментов, могут получить слишком уж сильно разнящиеся количественные оценки.

Следуя утверждению, что человек – лучший судья для оценки результатов работы алгоритмов сегментации [5], **Borsotti** с соавторами предложили еще один критерий, более соответствующий, по их мнению, человеческому восприятию:

$$Q = \frac{1}{10000N} \sqrt{R} \sum_{i=1}^R \left[ \frac{e_i^2}{1 + \log A_i} + \left( \frac{R(A_i)}{A_i} \right)^2 \right]. \quad (31)$$

В формуле (31) выражение под знаком суммы состоит из двух слагаемых. Первое принимает большие значения для неоднородных сегментов (обычно имеющих значительный размер). Второе слагаемое может быть велико только в случае мелких сегментов, так как на сегментированном изображении не может быть большого количества областей (величина  $R(A)$  в (31)), имеющих одинаковую большую площадь.

Если снова обратиться к Рис. 7, то видно, что визуально близкие сегментации, представленные на Рис. 7b и Рис. 7c, имеют почти одинаковую оценку в соответствии с новым критерием  $Q$ , а крайне неудачная сегментация (Рис. 7e), имевшая наилучшее значение критерия  $F$ , получила теперь аномально плохую оценку, что позволяет в режиме реального времени исключать такие некачественные сегментации из дальнейшего анализа.

## 4. Заключение

В последние два десятилетия проблеме сравнительного тестирования алгоритмов сегментации изображений уделяется все больше внимания в научной литературе. Поскольку общей теории сегментации все еще не существует, то аналитические методики оценки алгоритмов сегментации малоприменимы и имеют дело лишь с задачами специального вида. Основное внимание, в настоящий момент, уделяется развитию эмпирических методик, как использующих для оценки результатов работы алгоритмов сегментации эталонное сегментированное изображение (контролируемые методики), так и оценивающих качество сегментации непосредственно, без сравнения с эталоном (автоматические методики).

В литературе предложено уже множество количественных критериев оценки, предназначенных для использования в контролируемых или автоматических методиках. Каждый из этих классов критериев имеет свои достоинства и недостатки. Так, критерии, основанные на определении различий сегментированного изображения и эталонной сегментации, дают более точную оценку, зато критерии, непосредственно оценивающие свойства сегментированного изображения, могут использоваться в системах реального времени для оценки процесса сегментации в онлайн-режиме.

Сколько-нибудь масштабных сравнительных исследований различных критериев пока еще не проводилось. В опубликованных работах или используется крайне ограниченный набор тестовых изображений [9, 50], что не может, конечно, дать полного представления о способности тестируемых критериев адекватно

оценивать результаты сегментации самых разных типов изображений; или исследуются критерии, относящиеся к одной группе и оценивающие одни и те же свойства сегментированного изображения [51].

На работу алгоритма сегментации влияют множество факторов, поэтому трудно ожидать, что можно создать один универсальный критерий, одинаково хорошо оценивающий результаты работы алгоритмов всех имеющихся классов на всех доступных типах изображений.

Более перспективным кажется подход, предполагающий использование нескольких критериев для оценки качества сегментации. В последнее время он становится все более популярным. Так, **Sezgin** и **Sankur** [52] оценивали алгоритмы пороговой сегментации с помощью набора из пяти критериев. Несколько критериев оценки применялись и в работах [45, 53-55].

Очевидно, что ощутимый выигрыш от использования нескольких критериев оценки можно получить только в том случае, если эти критерии будут дополнять друг друга, а, следовательно, основываться на определении разных характеристик сегментированного изображения.

Методика формирования оптимального набора критериев оценки качества сегментации, а также способы вычисления обобщенной оценки на основе полученного вектора значений критериев являются, на данный момент, проблемами, требующими своего решения, и представляются перспективными направлениями для будущих исследований в области оценки качества сегментации изображений.

## Литература

1. K.S.Fu and J.K.Mui. A survey on image segmentation, *Pattern Recognition*, Vol.13, No.1, 1981, pp.3-16.
2. Y.J.Zhang, An Overview of Image and Video Segmentation in the Last 40 Years, in *Advances in Image and Video Segmentation*, ed Y.J.Zhang, IRM Press, 2006, pp.1-15.
3. R.M.Haralick and L.G.Shapiro. *Computer and Robot Vision*, Vol.1, Addison-Wesley, Reading, 1992.
4. H.D.Cheng, X.H.Jiang, Y.Sun, and J.Wang. Color image segmentation: advances and prospects, *Pattern Recognition*, Vol.34, No.12, 2001, pp.2259-2281.
5. N.R.Pal and S.K.Pal. A review on image segmentation techniques, *Pattern Recognition*, Vol.26, No.9, 1993, pp. 1277-1294.
6. J.Freixenet, X.Muñoz, D.Raba, J.Martí, X.Cufí. Yet Another Survey on Image Segmentation: Region and Boundary Information Integration, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.2352, Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Computer Vision, part III, 2002, pp.408-422.
7. R.M.Haralick and L.G.Shapiro. Image segmentation techniques, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.29, No.1, 1985, pp.100-132.
8. <http://ieeexplore.ieee.org>.
9. Y.J.Zhang. A survey on evaluation methods for image segmentation, *Pattern Recognition*, Vol.29, No.8, 1996, pp.1335-1346.

10. Y.J.Zhang. A review of recent evaluation methods for image segmentation, *Proc. of Sixth International Symposium on Signal Processing and its Applications( ISSPA 2001)*, Vol.1, 2001, pp.148-151.
11. Y.J.Zhang. Image segmentation evaluation in this century, in *Encyclopedia of Information Science and Technology*, ed. M.Khosrow-Pour, 2nd ed., IGI Global, 2009, pp.1812-817.
12. X.Jiang. Performance evaluation of image segmentation algorithms, in *Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision*, C. H. Chen and P. S. P.Wang, Eds., World Scientific, Singapore, 3rd edition, 2005, pp.525-542.
13. H.Zhang, J.E.Fritts, S.A.Goldman. Image segmentation evaluation: A survey of unsupervised methods, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol.110, Issue 2, 2008, pp.260-280.
14. D.Martin, C.Fowlkes, D.Tal, and J.Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics, in *Proceedings of 8th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV '01)*, Vol.2, Vancouver, BC, Canada, July 2001, pp.416-423.
15. M.C.Shin, D.Goldgof, K.Bowyer. Comparison of edge detector performance through use in an object recognition task, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol.84, No.1, 2001, pp.160-178.
16. Y.J.Zhang and J.J.Gerbrands. Segmentation evaluation using ultimate measurement accuracy, in *Proceedings CVPR*, Vol.1657, 1992, pp.449-460.
17. Y.J.Zhang and J.J.Gerbrands. Objective and quantitative segmentation evaluation and comparison, *Signal Processing*, Vol.39, No.1-2, 1994, pp.43-54.
18. M.F.Mattana, J.Facon, and A.S.Britto. Evaluation by recognition of thresholding based segmentation techniques on brazilian bankchecks, in *Proceedings SPIE*, Vol.3572, 1999, pp.344-348.
19. Z.M.Huo and M.L.Giger. Evaluation of a computer segmentation method based on performances of an automated classification method, in *Proceedings SPIE*, Vol.3981, 2000, pp.16-21.
20. X.Jiang, C.Marti, C.Irniger, and H.Bunke. Distance Measures for Image Segmentation Evaluation, *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 2006, Article ID 35909, 2006, 10 pages.
21. J.S.Cardoso and L.Corte-Real. Toward a Generic Evaluation of Image Segmentation, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol.14, No.11, 2005, pp.1773-1782.
22. O.Grau, S.Minelly, and G.A.Thomas. Applications of depth metadata, in *Proceedings of International Broadcasting Convention (IBC 2001)*, 2001, pp.62-70.
23. G.A.Thomas and O.Grau. 3d image sequence acquisition for tv and film production, in *Proceedings of 1st International Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission*, 2002, pp.320-326.
24. C.N.Graaf, A.S.E.Koster, K.L.Vincken and M.A.Viergever. Validation of the interleaved pyramid for the segmentation of 3D vector images, *Pattern Recognition Letters*, 15, 1994, pp.467-475.
25. Y.J.Zhang. Image segmentation in the last 40 years, in *Encyclopedia of Information Science and Technology*, ed M.Khosrow-Pour, 2nd ed., IGI Global, 2009, pp.1818-1823.
26. S.Chabrier, H.Laurent, C.Rosenberger, and B.Emile. Comparative study of contour detection evaluation criteria based on dissimilarity measures, *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, Vol.2008, Article ID 693053, 2008, pp.1-13.
27. А.В.Захаров, П.П.Кольцов, Н.В.Котович, А.А.Кравченко, А.С.Куцаев, А.С.Осипов. Некоторые методы сравнительного исследования детекторов границ, *Труды НИИСИ РАН*, Том 2, № 1, 2012, с.4-13.
28. R.L.Kettig and D.A.Landgrebe. Classification of multispectral image data by extraction and classification of homogeneous objects, *IEEE Transactions on Geoscience Electronics*, Vol.14, No.1, 1976, pp.19-26.
29. J.M.Gauch and C.W.Hsia. A comparison of three color image segmentation algorithms in four color spaces, *Proceedings of SPIE*, Vol.1818, Visual Communications and Image Processing '92, 1992, pp.1168-1181.
30. W.A.Yasnoff, J.K.Mui, and J.W.Bacus. Error measures for scene segmentation, *Pattern Recognition*, Vol.9, No.4, 1977, pp.217-231.
31. S.U.Lee, S.Y.Chung, and R.H.Park. A comparative performance study of several global thresholding techniques for segmentation, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.52, No.2, 1990, pp. 171-190.
32. M.Van Droogenbroeck and O.Barnich. Design of Statistical Measures for the Assessment of Image Segmentation Schemes, *Proceedings of 11th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP2005)*, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.3691, 2005, pp.280-287.
33. Y.W.Lim and S.U.Lee. On the color image segmentation algorithm based on the thresholding and the fuzzy c-means techniques, *Pattern Recognition*, Vol.23, No.9, 1990, pp.935-952.
34. Р.Дуда, П.Харт. Распознавание образов и анализ сцен, М.: Мир, 1976.
35. K.C.Strasters and J.J.Gerbrands. Three-dimensional image segmentation using a split, merge and group approach, *Pattern Recognition Letters*, Vol.12, No.5, 1991, pp.307-325.
36. W.K.Pratt. Digital Image Processing, John Wiley and Sons, New York, 1978.
37. Д.Форсайт, Ж.Понс. Компьютерное зрение. Современный подход, Вильямс, 2004.
38. Y.J.Zhang. Influence of image segmentation over feature measurement, *Pattern Recognition Letters*, Vol.16, No.2, 1995, pp.201-206.
39. M.D.Levine and A.Nazif. Dynamic measurement of computer generated image segmentations, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.7, No.2, 1985, pp.155-164.
40. Р.Гонсалес, Р.Вудс. Цифровая обработка изображений, М.: Техносфера, 2006.
41. P.C.Chen and T.Pavlidis. Image segmentation as an estimation problem, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol.12, No.2, 1980, pp.153-172.

42. P.K.Sahoo, S.Soltani, A.K.C.Wong, and Y.C.Chen. A survey of thresholding techniques, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.41, No.2, 1988, pp.233-260.
43. M.D.Levine and S.I.Shaheen. A Modular Computer Vision System for Picture Segmentation and Interpretation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.3, No.5, 1981, pp.540-556.
44. F.W.Campbell and J.G.Robson. Application of Fourier analysis to the visibility of gratings, *Journal of Physiology*, Vol.197, 1968, pp.551-566.
45. C.-I.Chang, Y.Du, J.Wang, S.-M.Guo, and P.Thouin. Survey and comparative analysis of entropy and relative entropy thresholding techniques, *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, Vol.153, No.6, 2006, pp.837-850.
46. J.Liu and Y.-H.Yang. Multiresolution color image segmentation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.16, No.7, 1994, pp.689-700.
47. P.Campadelli, D.Medici, and R.Schettini. Color image segmentation using Hopfield networks, *Image and Vision Computing*, Vol.15, No.3, 1997, pp.161-166.
48. T.Uchiyama and M.A.Arbib. Color Image Segmentation using Competitive Learning, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.16, No.12, 1994, pp.1197-1206.
49. M.Borsotti, P.Campadelli, and R.Schettini. Quantitative evaluation of color image segmentation results, *Pattern Recognition Letters*, Vol.19, No.8, 1998, pp.741-747.
50. S.Philipp-Foliguet, L.Guigues. Multi-scale criteria for the evaluation of image segmentation algorithms, *Journal of Multimedia*, Vol.3, No.5, 2008, pp.42-56.
51. H.Zhang, J.Fritts, and S.Goldman. An entropy-based objective evaluation method for image segmentation, in *Proc. SPIE- Storage and Retrieval Methods and Applications for Multimedia*, 2004, pp.38-49.
52. M.Sezgin and B.Sankur. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation, *Journal of Electronic Imaging*, Vol.13, 2004, pp.146-168.
53. A.Borghgraef, O.Barnich, F.Lapierre, M.Van Droogenbroeck, W.Philips, and M.Acheroy. An evaluation of pixel-based methods for the detection of floating objects on the sea surface. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2010:11 pages, 2010.
54. U.Gonzales-Barron and F.Butler. A comparison of seven thresholding techniques with the k-means clustering algorithm for measurement of bread-crumbs features by digital image analysis, *Journal of Food Engineering*, Vol.74, Issue 2, 2006, pp.268-278.
55. J.Chen, G.Zhao, and M.Pietikäinen. Unsupervised dynamic texture segmentation using local spatiotemporal descriptors, *Proc. 19th International Conference on Pattern Recognition (ICPR 2008)*, Tampa, FL, 2008, pp.1-4.

## Criteria for evaluating image segmentation

**P.P. Koltsov, N.V.Kotovich, A.A. Kravchenko, A.S. Kutsaev, A.S. Osipov and A.V. Zakharov**

**Abstract:** The influence of segmentation quality on the image recognition performance is very significant. So it is important to choose a segmentation algorithm that would be most adequate for the given specific task. Nowadays various criteria (analytical and empirical, quantitative and qualitative) for comparative evaluation of segmentation algorithms have been proposed. This paper is dedicated to quantitative empirical criteria for assessing image segmentation results. We consider both the criteria based on using ground truth images and the criteria that require no ground truth.

# Средства и методы интеграции бортового программного обеспечения

Ю.М. Лазутин<sup>1</sup>, Г.А. Чертов<sup>2</sup>, А.В. Родиков<sup>3</sup>, В.А. Рогожкин

*1 – доктор физико-математических наук, 2 – кандидат технических наук, 3 – кандидат технических наук,*

Рассматриваются проблемы, возникающие в процессе разработки программного обеспечения сложных аппаратно-программных управляющих комплексов при изменениях протоколов обмена данными по каналам связи и методы их решения. Описываются инструментальные средства поддержки разработанного метода автоматизированной генерации программ ввода-вывода данных. Рассматриваются различные подходы к оптимизации программного обеспечения и требования к структуризации бортовых программ.

## Введение

Современные управляющие комплексы часто имеют в своем составе большое число устройств, сопрягаемых по различным каналам связи. В ходе разработки программного обеспечения (ПО) таких комплексов протоколы обмена по каналам связи довольно часто изменяются. Изменения обусловлены устранением обнаруженных ошибок, появлением новых функциональных требований или абонентов, перераспределением данных между каналами с целью оптимизации их загрузки, изменением формата и состава передаваемых данных и т.д. Изменения протоколов обмена приводят к изменению программ, связанных с соответствующими каналами связи. Особенно неприятны изменения, происходящие после завершения очередных этапов проекта, когда разработанное ПО проходит всестороннее и обычно весьма дорогостоящее тестирование в составе управляющего комплекса, готовится проектная документация. После каждой такой модификации необходимо повторить отладку и полное тестирование комплекса. В ходе тестирования выявляются ошибки изменения, что приводит к очередным модификациям. Все это приводит не только к значительному усложнению процесса отслеживания изменений и ведения проекта, но и повышает риск рассогласования программного кода и проектной документации.

## 1. Автоматизированная генерация интерфейсных программ

В работе [1] авторами предложен метод, позволяющий:

1. исключить рассогласование информации, находящейся в документации и исходном коде программ, так как данные в автоматическом режиме берутся из одной и той же версии базы данных;
2. освободить разработчиков функционального программного обеспечения от управления потоками данных и потоками управления, то есть разработчик программы не заботится о

том, откуда ему брать данные входного интерфейса и куда передавать данные выходного интерфейса;

3. освободить разработчиков функционального программного обеспечения от упаковки/распаковки данных;
4. исключить проблемы, возникающие при наращивании программного комплекса новыми программными модулями, то есть, были построены такие принципы, которые позволяют без особых трудозатрат подключить дополнительное количество функциональных задач, а также перемещать их с одного процессорного модуля на другой;
5. исключить, при необходимости, перемешивание данных со смежных шагов работы;
6. минимизировать поток данных по межпроцессорной шине бортового вычислителя;
7. исключить с большой степенью вероятности, пересечение идентификаторов глобальных объектов программ.

Суть данного метода состоит в отделении интерфейсов входного и выходного обмена от программного модуля и автоматическая их генерация на основе информации о структуре обмена, содержащейся в некоторой базе данных.

## 2. Инструментальные средства

На рисунке 1 представлена схема функционирования системы автоматизированной разработки программных компонентов управления потоками данных в комплексах бортовых программ реального времени, которая включает:

- базу данных протоколов информационного взаимодействия (БДПИВ) устройств аппаратно-программного комплекса (АПК) и функционального программного обеспечения (ФПО);
- систему автоматической генерации исходных кодов программ управления потоками данных ПО;

▪ справочную систему, позволяющую получать всю

Вся информация, специфицирующая интерфейсы

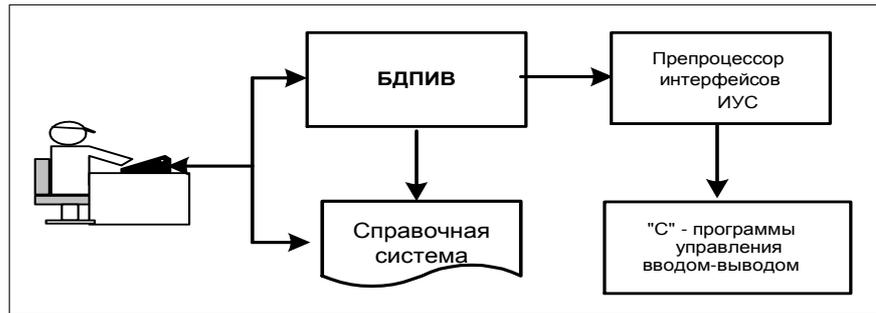


Рис 1. Система автоматизированной разработки программных компонентов управления потоками данных

необходимую информацию о потоках данных между составными частями АПК.

В данной работе предлагается рассмотреть более подробно возможности, предоставляемые базой данных протоколов информационного взаимодействия и справочной системой, а также наметить пути оптимизации информационных обменов между различными структурными компонентами программного обеспечения (СКПО) и бортовыми устройствами, входящими в состав сложного аппаратно-программного комплекса.

Задача оптимизации становится одной из важнейших, так как при увеличении объема и алгоритмической сложности задач, решаемых комплексами бортовых систем современных военных летательных аппаратов, значительно повышается объем данных, передаваемых между частями системы.

## 2.1 База данных протоколов информационного взаимодействия

Исходные данные для генерации программных компонентов управления потоками данных находятся в базе данных протоколов информационного взаимодействия, которая содержит информацию, определяющую статические и динамические характеристики таких элементов интерфейса как:

- сигналы (параметры), составляющие смысловой уровень интерфейса (например координаты, сигналы исправности бортовых систем, режим работы, информацию о тактической обстановке и т.д.);
- компоненты данных (слова, сообщения и т.д.), в которых содержатся сигналы;
- описание каналов связи, по которым происходит передача компонентов данных. Например, для канала связи Aginc 429 указывается несущая частота, величина паузы между посылками, номер изменения;
- абоненты – источники и приемники данных;
- интерфейсы СКПО, включая сигналы внешнего и внутреннего интерфейсов (потоки сигналов типа задача – задача);
- распределение по процессорам каналов связи и функциональных задач.

ФПО, как на этапе первоначальной разработки, так и этапе модификации, вводится только в БДПИВ, откуда она автоматически попадает в различные компоненты ФПО и документацию. В результате значительно уменьшается трудоемкость разработки компонентов ПО управления потоками данных, их модификации, уменьшается вероятность появления в этом ПО ошибок, гарантируется совпадение информации в документации и программах.

БДПИВ состоит из независимых серверной и клиентской частей. Серверная часть состоит из базы данных (mysql), и клиента БДПИВ, разработанного на языке PHP, обеспечивающего пользователей БДПИВ всем необходимым инструментарием для визуализации и редактирования информации. Благодаря такой структуре клиента БДПИВ (http сервер с базой данных и средствами работы с БДПИВ) доступ к базе данных может быть осуществлён с любого компьютера подключенного к сети с использованием любого браузера без установки дополнительных приложений. Вся работа с базой данных ПИВ осуществляется в окне браузера после авторизации на сервере с установленным клиентом базы данных протоколов информационного взаимодействия. Программное средство «Клиент для работы с базой данных протоколов информационного взаимодействия» позволяет:

- формировать базу данных протоколов информационного взаимодействия;
- уменьшить трудоёмкость формирования и изменения базы данных протоколов информационного взаимодействия (ПИВ) благодаря возможности автоматизированного занесения измененных ПИВ из специальных электронных форм (СЭФ);
- автоматически генерировать специальные электронные формы из базы данных протоколов информационного взаимодействия для получения актуальной документации о используемых ПИВ, подключённых к функциональным задачам сигналах, и т.п..

Все интерфейсы, содержащиеся в БДПИВ, можно разделить на две основные группы:

1. Внешние интерфейсы (описаны в документации с приложением специальных электронных форм). К таким интерфейсам можно отнести:

- MIL-STD 1553B – магистральный последовательный интерфейс с централизованным управлением (двойная избыточная линия передачи информации, полудуплексный протокол «команда-ответ» и до 31 удалённого абонента. Каждая линия управляется своим контроллером канала);

- Arinc 429 (двухпроводная однонаправленная шина данных. В настоящее время является доминирующей авиационной шиной передачи данных для большинства самолётов. Допускает до 20 приёмников и один передатчик);

- Fibre Channel - семейство протоколов для высокоскоростной передачи данных.

## 2. Внутренние интерфейсы:

- Интерфейс между ФПО (спецификация требований к интерфейсам ПО);

- Интерфейс между структурными компонентами программного обеспечения (СКПО) (описание проекта ПО).

Кроме того, БДПИВ содержит большое количество служебной информации, определяющей частоты, порядок запуска СКПО, их распределение по процессорным модулям (в случае многопроцессорной архитектуры центрального вычислителя) и т.п.

При подключении сигналов к СКПО возможно задать следующие атрибуты:

- Синоним – определяет имя переменной в исполняемой программе СКПО, можно использовать имя элемента структуры или массива. Благодаря использованию синонимов появляется возможность использовать в СКПО переменные с именами отличными от имён в протоколах информационного взаимодействия;

- Тип – функциональный тип сигнала. Подключаемый к задаче сигнал может иметь любой стандартный тип языка Си;

- Коэффициент пересчета – необходим в случае, если на выходе из одного СКПО и на входе другого у сигнала различаются единицы измерения (только на входе в СКПО);

- Значение по умолчанию – присваивается сигналу при инициализации;

- Глобальность – сигнал может быть определен как глобальный (видимый из всех файлов некоторого СКПО) или не глобальный (видимый только в локальном диспетчере);

- Тип обмена – передача сигнала по указателю или по значению;

- Признак двойной буферизации;

- Объединение сигналов интерфейса в структуры и массивы данных.

При занесении данных в БДПИВ осуществляется большое число проверок, обеспечивающих получение корректной непротиворечивой информации. К таким проверкам можно отнести:

- Проверку наличия источника у потребляемого СКПО сигнала;

- Возможность упаковки сигнала с заданным диапазоном значений в указанные разряды;

- Корректность наименования сигналов.

Кроме того, клиент БДПИВ позволяет

- Вручную редактировать содержимое базы данных,

- Создавать и удалять базы данных на сервере,

- Импортировать и экспортировать специальные электронные формы протоколов информационного взаимодействия (СЭФ ПИВ) в базы данных,

- Импортировать и экспортировать СЭФ СКПО в базу данных,

- Создавать и удалять цепочки слов Arinc 429 и сообщений мультиплексного канала информационного взаимодействия (МКИО, MIL-STD 1553B),

- Создавать и удалять команды управления,

- Сравнивать две базы данных,

Эти и ряд других возможностей полностью обеспечивают пользователя (системного интегратора) всем необходимым инструментарием для ведения и модификации проекта.

## 2.2 Справочная система базы данных протоколов информационного взаимодействия

Справочная система БДПИВ позволяет получить

- информацию о структуре и количественных характеристиках обмена между СКПО, загрузки линий связи, процессорных модулей, процент загрузки вносимый каждым СКПО и т.п..

- информацию о структуре обмена информацией для конкретного процессорного модуля с подробной информацией об обменах данного процессорного модуля и списком задач, выполняемых на данном процессоре с процентом загрузки шины данных.

- для каждой функциональной задачи можно получить список СКПО, с которыми производятся информационные обмены, включая размер и частоту передаваемых данных.

## 3. Оптимизация информационных обменов

В настоящее время наиболее распространённым типом бортового специализированного вычислителя современной авиационной техники являются БЦВМ с открытой масштабируемой архитектурой (ОМА) [2] – кластер процессорных модулей с общей шиной данных. В этой архитектуре предполагается, что каждый процессор имеет независимое системное и функциональное ПО, которые могут взаимодействовать между собой по общей шине данных. Операционные системы каждого процессора обеспечивают набор средств для обмена данными и синхронизации программ, выполняемых на каждом из процессоров. Примером отечественных БЦВМ с ОМА являются специализированные цифровые вычислительные машины серии «Багет-XX» [4, 5] с шиной VME.

К достоинствам общей шины можно отнести доступность всех абонентов друг другу при минимуме ресурсов. Однако это достоинство становится

недостатком при увеличении числа абонентов, возрастании их производительности и объёма передаваемой информации, когда усиливается конкуренция за доступ к общей шине. В этих условиях изменение объёма трафика между двумя процессорными модулями из семи может повлиять на функционирование всех модулей. Такие эффекты наблюдались на практике. Очевидно, что при такой архитектуре БЦВМ задача оптимального размещения функциональных задач по процессорным модулям с целью максимального снижения загрузки шины передачи данных между процессорами становится первоочередной. Данная задача осложняется рядом факторов технического и организационного характера:

- обычно в нормативных документах, которыми обязаны руководствоваться разработчики, присутствуют ограничения на максимальную загрузку устройств БЦВМ – должен оставаться запас,
- Распределение функциональных задач по процессорам закреплено в договоренностях между соисполнителями (например, по принципу – «каждому соисполнителю – свой процессорный модуль»), зафиксированных в соответствующих документах,
- Структуризация функциональных задач при их поставке головному соисполнителю (например, перечень о-файлов, участвующих в компоновке исполняемых двоичных образов для конкретных процессоров) закреплена в соответствующих документах,
- За упомянутыми документами стоит процедура испытаний, которые должны провести соисполнители,
- В сложных, развивающихся во времени проектах невозможно формализовать и априори перечислить в базе данных, какой процент процессорного времени и в каком режиме будет потреблять каждое СКПО.
- Пропускная способность шин данных зависит не только от объёма передаваемых данных, но и от накладных расходов ОС на организацию обменов. В сложных проектах разработчики ОС могут быть среди соисполнителей (например, разрабатывать очередную версию ОС по согласованному техническому заданию), но в любом случае структуризация передаваемых данных оказывает большое значение на эффективность использования шин данных.

Перечисленные факторы серьезно осложняют разработку процедуры автоматического поиска оптимального размещения функционального ПО по процессорам с учётом всех ограничений. В данной работе описывается автоматизированная система, базирующаяся на активное использование справочной системы БДВИВ, благодаря которой, системный интегратор - лицо, принимающее решения, может в удобном и наглядном виде оценить полную загрузку линий связи и процент загрузки вносимый каждым СКПО. Системный интегратор может на основе своего опыта, знания возможностей средств автоматической генерации и знания всех требований к ПО, используя

информацию о структуре и объёмах информационных обменов из БДПИВ, принять решение о размещении задач по процессорным модулям [3], допустимость которого в последствии проверяется на стендах (проверка соответствия требованиям о загрузке процессоров, линий связи, памяти, удовлетворение временным характеристикам и последовательности выполнения программ) в ходе отработки версии.

### 3.1 Пример с дублированием СКПО

Иногда незначительное изменение программ может привести к значительному сокращению загрузки линий связи по сравнению с простым перемещением на другой процессорный модуль. Рассмотрим следующий пример:

Некоторое СКПО принимает данные от всех остальных СКПО (со всех процессоров), производит их обработку и выдачу во внешние каналы информационного взаимодействия. Практическим примером подобного СКПО может служить задача обработки и регистрации состояния бортовых систем. Вопрос - где расположить данное СКПО. Очевидный вариант – расположить рассматриваемое СКПО на одном процессоре с мезонинным модулем, осуществляющим передачу данных в шину (см. рис. 2). При такой организации все СКПО отсылают по межпроцессорной шине данные до нашего СКПО, а оно, произведя обработку, передаёт их во внешнюю шину передачи данных, не загружая общую шину, так как мезонинный модуль и функциональная задача расположены на одном процессоре.

Но при таком казалось бы оптимальном решении не учитываются особенности работы общей шины. Дело в том, что на передачу большого объёма данных одной посылкой тратится гораздо меньше времени, чем на передачу того же объёма данных маленькими частями.

В ходе анализа проблемы системный интегратор обнаруживает, что гораздо эффективнее разбить рассматриваемое СКПО на несколько частей и разместить на каждом процессоре абсолютно аналогичные СКПО, занимающиеся сбором и обработкой информации от функциональных задач данного процессорного модуля (шина не загружается) и затем передачей большого массива подготовленных данных в процессор с мезонинным модулем одной посылкой (загрузка шины значительно меньше, а, в случае нахождения на одном процессорном модуле с мезонинным модулем, вообще отсутствует) см. рис 3.

На практике после внесения указанных изменений в программное обеспечение загрузка шины VME снизилась в несколько. Это один из многих случаев, когда следование очевидной схеме распределения СКПО, без учёта особенностей функционирования оборудования, средств генерации, и самого программного обеспечения приводит к принятию неэффективного в рамках системы решения.

Из приведённого примера становится понятно насколько важной является задача грамотного разбиения программного обеспечения на отдельные СКПО. Далее попробуем сформировать требования, которых стоит придерживаться при разбиении

функциональных задач для сокращения накладных расходов и повышения скорости и эффективности работы.

С точки зрения структуры бортовой программы основными свойствами СКПО, которые должны

учитываться при декомпозиции программы на эти компоненты, являются:

- функциональное единство программных модулей, образующих СКПО;
- единство интерфейса функциональных программ, входящих в СКПО;

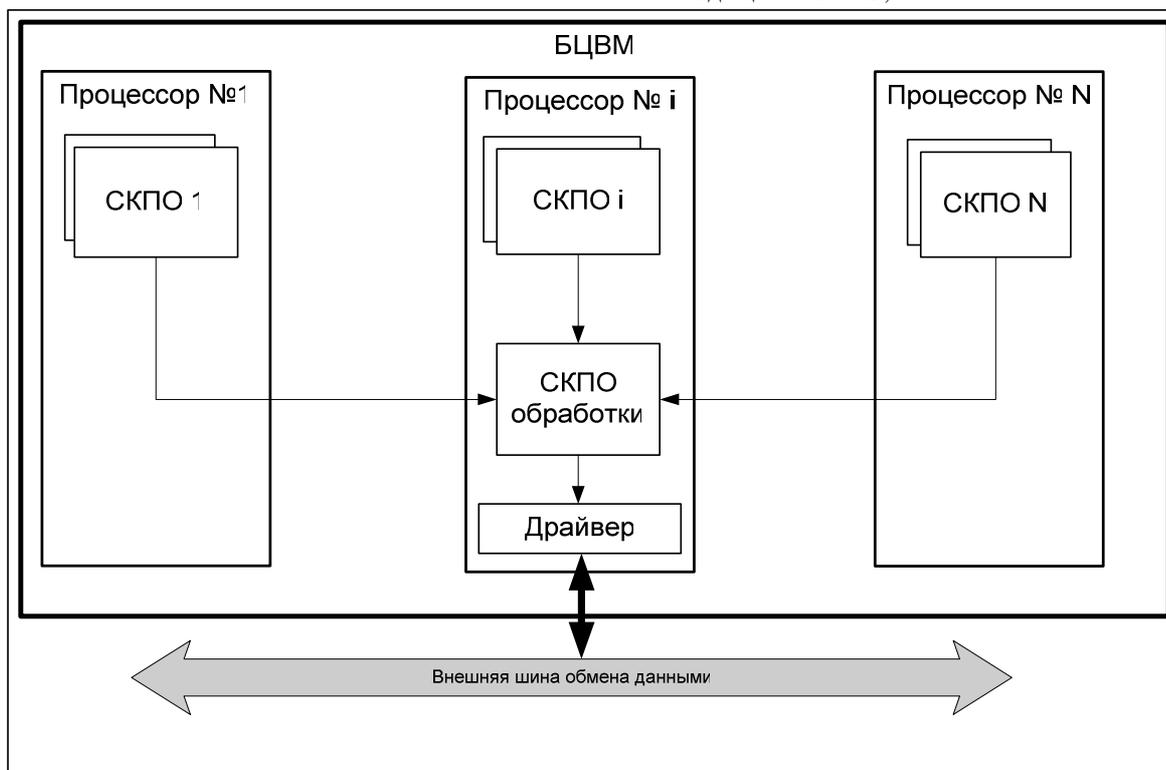


Рис 2. Очевидный вариант размещения СКПО

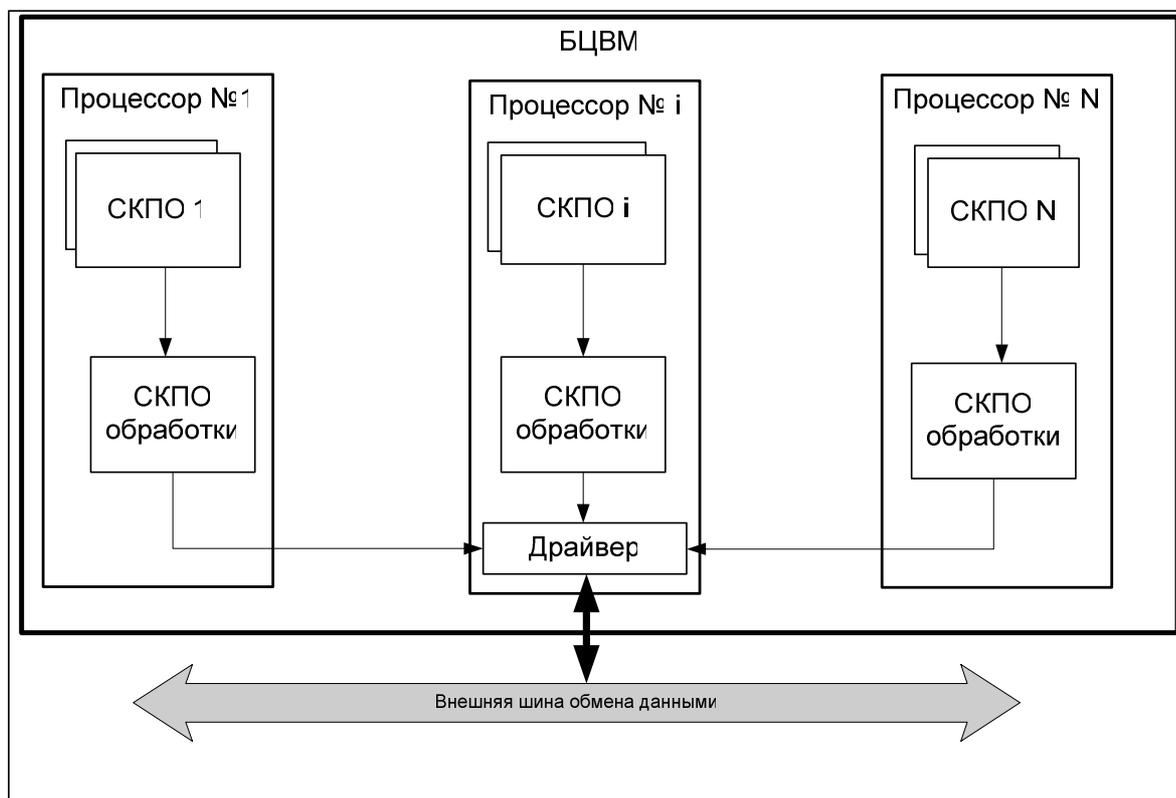


Рис 3. Окончательный вариант размещения СКПО

- наличие определенного события в программе, при наступлении которого СКПО должно начинать выполнение своих функций.

### 3.2 Фиктивные интерфейсы

СКПО является объектом управления глобального диспетчера, который инициирует выполнение програм-

очевидно, что при индикации различных кадров, СКПО должно обрабатывать различные данные, и их состав напрямую зависит от отображаемых кадров и текущего режима. Таким образом, при организации СКПО в соответствии с рисунком 5. распаковываться будут все входные и выходные параметры, но использоваться будет только некоторая их часть.

Для сокращения накладных расходов при распаковке (упаковке) параметров предлагается

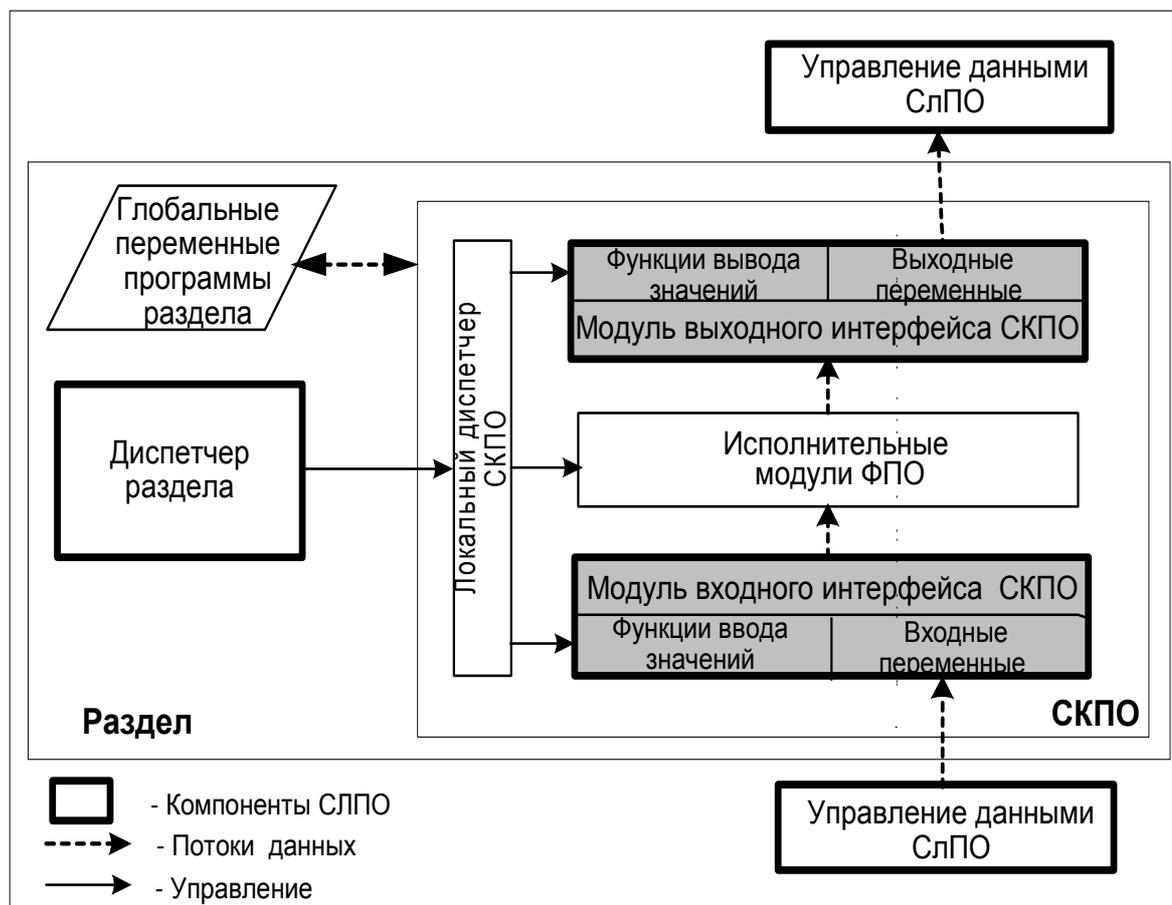


Рис 4. Структура СКПО

мы СКПО при каждом возникновении этого события.

Множество входных и выходных сигналов СКПО рассматривается и поддерживается программами управления вводом-выводом как единый интерфейс этого компонента. Каждый структурный компонент ПО в составе ФПО должен представлять собой программу, в которой решается часть общей задачи (модульное построение программ).

Обычно каждый структурный компонент программного обеспечения выполняет определённую функцию. Например, для летательных аппаратов к таким функциям можно отнести задачи управления индикацией или получения и обработки информации о состоянии различных бортовых систем, управления локатором и т.д. Для решения данных задач на вход СКПО необходимо подключать сотни и даже тысячи различных сигналов (уже на первых версиях для решения задач индикации число входных сигналов некоторых СКПО может превышать 1000). Однако

организовать СКПО в соответствии со структурой, представленной на рис. 5. Основным отличием является наличие у СКПО нескольких входных и выходных интерфейсов. Входные и выходные интерфейсы, у которых нет своего отдельного локального диспетчера, запускающего их с определённой частотой, и исполнительных модулей ФПО, будем называть фиктивными. Для обычных СКПО препроцессор интерфейсов генерирует не только файлы входного и выходного интерфейса, но и локальный диспетчер, а также настраивает диспетчер раздела, у фиктивных СКПО файл локального диспетчера и исполнительные модули отсутствуют. Генерируются только функции упаковки и распаковки параметров, подключенных к фиктивному СКПО. Периодичностью их запуска управляет СКПО «хозяин» фиктивного СКПО. При такой организации локальный диспетчер СКПО (или исполнительные модули ФПО), получая информацию о текущем

режиме, могут принять решение распаковку данных из каких фиктивных СКПО необходимо осуществить. Распаковка параметров, которые в текущий момент не используются, не производится, и это приводит к существенной экономии процессорного времени.

Однако осуществлять передачу данных из источника данных в раздел с потребителями по-прежнему необходимо. Это вызвано тем что служебное

примера выдачу информации о загрузке межпроцессорной шины.

Для представления информации о величине и структуре загрузки шины VME данными наиболее информативным видится отображение на экране процента от полной загрузки шины, создаваемого каждым процессорным модулем. При необходимости получить информацию о структуре обмена информа-

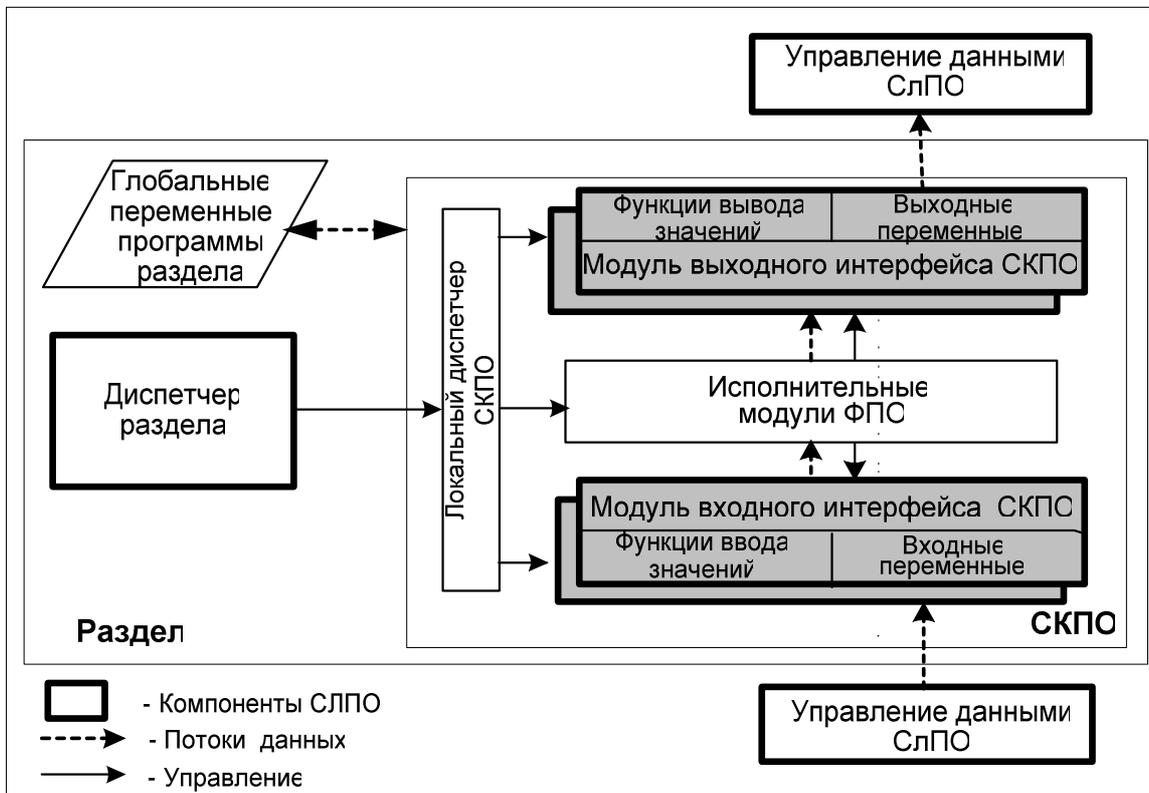


Рис 5. Структура СКПО оптимизированная в части распаковки и упаковки параметров

ПО (передачи данных) не зная логику его работы СКПО не может определить в какой момент ему могут потребоваться данные из модулей входного интерфейса и в случае не передачи обновлённых данных существенно возрастают временные затраты между моментами запроса данных и их фактического получения.

Необходимо заметить, что при строгом следовании требованиям к разбиению задач на СКПО и ФПО, а именно единству интерфейсов и функциональному единству, необходимость в использовании фиктивных СКПО зачастую отсутствует.

### 3.3 Отображение информации о загрузке VME

Чтобы принять решение о разбиении функциональных задач на СКПО и эффективном их размещении в центральном вычислителе, системному интегратору нужно предоставить большой объем справочной информации о структуре и количественных характеристиках обмена между ФЗ, загрузки линий связи, процессорных модулей и т. п. Почти всю необходимую информацию можно получить из справочной системы БДПИВ. Рассмотрим в качестве

цией для конкретного процессорного модуля необходимо перейти на страницу с подробной информацией об обменах данного процессорного модуля и получить список задач, выполняемых на данном процессоре с процентом загрузки шины данных. При необходимости для каждой задачи можно получить список СКПО, с которыми производятся информационные обмены, включая размер и частоту передаваемых данных. Так как скорость передачи данных по шине нелинейно зависит от их размера, то для вычисления скорости передачи, и, как следствие, степени загрузки, были проведены работы по вычислению скорости передачи в зависимости от размера данных, и при построении диаграммы загрузки производится сравнение с априори полученными реперными точками и получение скорости передачи данных для указанного диапазона. Кроме того, при оценке степени загрузки шины данных, программа учитывает логику построения информационных потоков препроцессором интерфейсов. При генерации препроцессор интерфейсов анализирует информационные потоки от нескольких СКПО, объединяя в одну посылку большего размера данные поступающие в один приёмник, что приводит к повышению быстродействия.

Аналогичные методы возможно использовать и при анализе структуры обменов по внешним каналам информационного взаимодействия.

## 5. Заключение

Клиент БДПИВ, имея широкий набор средств для проектирования и анализа программного обеспечения сложного аппаратно-программного комплекса, позволяет существенно облегчить задачу интеграции функциональных программ. Рассмотренные методы и

вочной системы системному интегратору становится проще принять решение о распределении функциональных задач основываясь на предоставленных данных о структуре информационных потоков в комплексе, своём опыте и квалификации. Что, в силу большого числа ограничений на разрабатываемое ПО, является сложной задачей. Рассмотренный пример показывает, что, даже в случае решения задачи автоматического поиска оптимального распределения функциональных задач, произведя несущественные изменения программ возможно получить ещё



Рис 6. Пример отображения информации о загрузке шины VME

средства оптимизации загрузки центрального вычислителя позволяют существенно экономить ресурсы не только центральных процессоров вычислителя, но и межпроцессорных и межблочных шин обмена данными. Предлагаемый механизм визуализации структуры информационных обменов существенно облегчает задачу системного интегратора по поиску оптимального размещения СКПО на процессорных модулях, однако, многое зависит не только от распределения СКПО, но и от грамотного разбиения функциональных задач на структурные компоненты их разработчиком.

Разработанный механизм и инструментальные средства поддержки разработки позволяют с лёгкостью в кратчайшие сроки производить доработку и перераспределение задач по процессорным модулям, окнам и разделам (для операционных систем семейства ARING 653). Благодаря широким возможностям спра-

значительно более эффективное решение.

## Литература

1. Ю.М. Лазутин, Г.А. Чертов, А.В. Родиков В.А. Рогожкин. Методология построения потоков данных в сложных аппаратно-программных комплексах // Программные продукты и системы 2011. №4
2. Ю. И. Зеленюк и др. Архитектуры бортовых специализированных цифровых вычислительных машин // Мир авионики : журнал национальной Ассоциации авиаприборостроителей. - № 6, 2010.
3. Р.Л. Кинни, Х. Райфа. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения // Изд. «Радио и связь», 1981г.
4. [http://www.rpkb.ru/index.php\\_page\\_id=16.html](http://www.rpkb.ru/index.php_page_id=16.html)
5. <http://www.pcweek.ru/themes/detail.php?ID=51809>

## Tools and methods for integrating embedded software

Y.M. Lazutin, G.A. Chertov, A.V. Rodikov, V.A. Rogozkin

**Abstract.** Problems, arising in software development for complex hardware-software systems when data exchange protocols are modified are considered. Software tools supporting developed method of automatic generation of input-output software are described. Various approaches to optimization of input-output traffic and requirements to structuring of software are discussed.