

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»
(ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН)

ТРУДЫ НИИСИ РАН

ТОМ 6 N 1

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ:**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ

МОСКВА
2016

Редакционный совет ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН:

В.Б. Бетелин (председатель),
Е.П. Велихов, В.А. Галатенко, В.Б. Демидович (отв. секретарь), Б.В. Крыжановский,
А.Г. Кушниренко, А.Г. Мадера, М.В. Михайлюк, В.Я. Панченко, В.П. Платонов,
В.Н. Решетников

Главный редактор журнала:

В.Б. Бетелин

Научный редактор номера:

А.Г. Мадера

Тематика номера:

Моделирование процессов физической природы, вопросы микро- и нанoeлектроники,
математические исследования и информационные технологии

Журнал публикует оригинальные статьи по следующим областям исследований:
математическое и компьютерное моделирование, обработка изображений, визуализация,
системный анализ, методы обработки сигналов, информационная безопасность,
информационные технологии, высокопроизводительные вычисления, оптико-нейронные
технологии, микро- и нанoeлектроника, вопросы численного анализа

The topic of the issue:

Modeling for processes of the physical nature, questions of micro- and nano-electronics,
Mathematical investigations and Information Technologies

The Journal publishes novel articles on the following research areas: mathematical and computer
modeling, image processing, visualization, system analysis, signal processing, information security,
information technologies, high-performance computing, optical-neural technologies,
micro- and nanoelectronics, problems of numerical analysis

Заведующий редакцией: Ю.Н. Штейников

Издатель: ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН,
117218, Москва, Нахимовский проспект 36, к. 1

СОДЕРЖАНИЕ

I. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

<i>И.В.Афанаскин.</i> Некоторые графические приёмы анализа разработки нефтяных месторождений	5
<i>К.Д.Ашмян, В.А.Юдин, А.В.Королёв, Д.Т.Миронов, И.В.Афанаскин, С.Г.Вольпин.</i> Проблемы и задачи изучения углеводородов баженовской свиты для применения метода термогазового воздействия	17
<u>Р.М. Кац.</u> Некоторые проблемы применения трассерного метода для гидродинамического моделирования	25
<i>Ф.С.Зайцев, А.Г.Шишкин, А.А.Лукьяница, Е.П.Сучков, С.В.Степанов, Ф.А.Аникеев.</i> Базовые компоненты аппаратно-программного комплекса моделирования и управления тороидальной плазмой методом эпсилон-сетей на гетерогенных мини - суперкомпьютерах	36
<i>Б.В.Крыжановский, М.Ю.Мальсагов.</i> Спектры локальных минимумов в спин-стекольных моделях	50
<i>М.Ж.Акжолов.</i> Численное моделирование конвективного теплообмена в электронной системе при различных мощностях источника тепла.	62
<i>П.И.Кандалов.</i> Интервально стохастические тепловые процессы, протекающие в электронном модуле, заключённом в герметичном корпусе	64

II. ВОПРОСЫ МИКРО- И НАНО-ЭЛЕКТРОНИКИ

<i>А.С.Куцаев.</i> Генератор стохастических тестов с ограниченным моделированием выполнения	69
<i>Н.В.Масальский.</i> Моделирование распределения поверхностного потенциала в двух затворных симметричных КНИ КМОП нанотранзисторах с гауссовым вертикальным профилем легирования	78
<i>С.А.Кизиев, С.В.Седов, К.К.Смирнов, А.Г.Сухов, А.С.Цимбалов.</i> Технологические особенности тестирования интегральных микросхем в полимерных корпусах подтипа 44 по ГОСТ 17467-88	84
<i>И.М.Косарев.</i> Резервирование каналов приёма-передачи данных в коммуникационных контроллерах встроенного применения	90
<i>П.А.Алексан.</i> Методика тестирования приёмопередатчика PCI Express	98

III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В.Б.Демидович. Об интерполяции функций обобщёнными полиномами, построенными на базе гладких чебышёвских систем 102

А.М.Костылёв. Основные подходы к проектированию информационно-поисковой системы по средствам вычислительной техники и программному обеспечению 115

Некоторые графические приемы анализа разработки нефтяных месторождений

И.В. Афанаскин

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail : ivan@afanaskin.ru

Аннотация: Рассматриваются вопросы анализа разработки нефтяных месторождений. Приводится концепция ячеек заводнения и модель материального баланса для нее. Предполагается, что пластовое давление выше давления насыщения нефти газом. При этом забойное давление в добывающих скважинах может быть как выше, так и ниже давления насыщения нефти газом. Рассматриваются вопросы использования ячеек заводнения для анализа разработки.

Ключевые слова: анализ разработки, ячейки заводнения, модель материального баланса, зона дренирования скважины.

Введение

Для моделирования разработки нефтяных месторождений используется большое количество различных подходов - от простых аналитических (как правило, одномерных и одно- или двухфазных) моделей до сложных трехмерных многофазных моделей, требующих использования численных методов решения систем дифференциальных уравнений в частных производных и мощных компьютеров. Доминирующим методом разработки нефтяных месторождений в России является заводнение. При этом большинство нефтяных месторождений находятся на третьей или четвертой стадии разработки. Это означает, что в продукции добывающих скважин присутствует большое количество воды. Контроль и управление разработкой таких месторождений требуют большого количества расчетов для решения различных задач. Во многих случаях использование трехмерных многофазных моделей является неприемлемым в виду больших трудозатрат. Для решения многих оперативных задач разработки обводненных нефтяных месторождений и управления заводнением достаточно более простых моделей.

Задача управления заводнением актуальна как для старых нефтедобывающих районов, так и для ХМАО – основного нефтедобывающего региона страны.

1. Концепция ячеек заводнения

Для анализа эффективности системы заводнения нефтяных пластов используют множество разных методов, в том числе – графических. Вообще говоря, большинство методов, так или иначе, используют представление результатов в графической форме. Рассмотрим метод ячеек заводнения [1-5]. Данный метод предполагает разбиение нефтяного пласта на блоки, включающие добывающие и нагнетательные скважины. Обычно границы блоков проводят по рядам добывающих скважин, таким образом граничные скважины принадлежат к нескольким блокам сразу и

их добыча разделяется между этими блоками. Нагнетательные скважины обычно входят только в один блок. Таким образом оценивается влияние одной или нескольких нагнетательных скважин, находящихся в блоке, на добывающие скважины. Ячейки заводнения используются для:

1. анализа взаимовлияния добывающих и нагнетательных скважин,
2. расчета компенсации отбора жидкости закачкой воды,
3. решения оптимизационных задач,
4. планирования геолого-технических мероприятий на скважинах,
5. обоснования плана по добыче нефти и закачке воды,
6. краткосрочного прогнозирования работы скважин (месяц, год, до 5 лет).

Настройка энергетики ячеек заводнения осуществляется методом материального баланса. Расчет показателей работы скважин проводится с помощью характеристик вытеснения [6, 7] либо с помощью различных аналитических методик (модель Дикстры-Парсона, модель Вэлджа и др.)

Для анализа разработки по ячейкам заводнения строят такие карты, как:

1. карты начальных геологических запасов нефти,
2. карты извлекаемых запасов нефти,
3. карты остаточных геологических и извлекаемых запасов нефти,
4. карты текущей и конечной нефтеотдачи,
5. карты текущей добычи и закачки по фазам,
6. карты накопленной добычи и закачки по фазам,
7. карты обводненности,
8. карты пластового давления,
9. карты текущей компенсации отбора жидкости закачкой воды,
10. карты накопленной компенсации отбора жидкости закачкой воды.

Рассмотрим модель разработки участка нефтяного пласта группой скважин на основе концепции материального баланса при двухфазной фильтрации

нефти и воды. Эту модель можно использовать для указанных выше расчетов.

Модель имеет следующие ограничения:

1. В рассматриваемой зоне пласт должен быть единой гидродинамически связанной системой.
2. Пластовое давление выше давления насыщения нефти газом.
3. Капиллярными и гравитационными силами пренебрегается.
4. Распределение флюидов в пространстве не учитывается, т.е. можно оперировать средними по рассматриваемому участку пласта насыщенностями.
5. Модель не позволяет предсказывать время прорыва воды в добывающие скважины (что вытекает из предыдущего пункта), поэтому на момент перехода от адаптации модели по истории разработки к прогнозу показателей разработки все добывающие скважины должны быть обводнены.
6. Изменение пластового давления по площади рассматриваемого участка мало и можно оперировать средним по участку пластовым давлением.
7. Пласт представлен одной емкостной системой (либо поры, либо трещины).
8. Переток нефти через границы участка отсутствует.
9. Течение изотермическое. Жидкости не смешивающиеся. Фазовых переходов и химических реакций нет.

Тогда систему уравнений сохранения и замыкающих соотношений с учетом концепции материального баланса можно записать в виде:

$$V \frac{d}{dt} \left(\frac{mS_o}{B_o} \right) = -q_o, \quad (1)$$

$$V \frac{d}{dt} \left(\frac{mS_w}{B_w} \right) = -q_w + q_{iw} + w, \quad (2)$$

$$S_o + S_w = 1, \quad (3)$$

$$m = m_o [1 + C_r (P - P_0)], \quad (4)$$

$$B_\alpha = B_{\alpha 0} [1 - C_\alpha (P - P_0)], \quad \alpha = o, w, \quad (5)$$

где V - объем рассматриваемого участка пласта; m - пористость; S_α , B_α , C_α , q_α , $\alpha = o, w$ - насыщенность, объемный коэффициент, сжимаемость и дебит скважин по нефти и воде соответственно; q_{iw} - расход закачиваемой в пласт воды; w - дебит притока воды в пласт из водоносной области; P - пластовое давление; m_o , $B_{\alpha 0}$, $\alpha = o, w$ - пористость и объемный коэффициент нефти и воды при начальном пластовом давлении P_0 , C_r - сжимаемость пласта.

Систему уравнений (1)-(5) можно преобразовать к следующей системе дифференциальных уравнений для водонасыщенности S и давления P :

$$\begin{aligned} Vm_o [C_r + (C_w - C_o)S + C_o] \frac{dP}{dt} = \\ = -B_{o0}q_o + B_{w0}(w + q_{iw} - q_w) \end{aligned} \quad (6)$$

$$Vm_o \left[\frac{dS}{dt} + (C_r + C_w)S \frac{dP}{dt} \right] = B_{w0}(w + q_{iw} - q_w). \quad (7)$$

Используя конечно-разностную форму представления производной, можно получить следующие формулы для определения давления и насыщенности на следующем временном шаге:

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) = P(t) - \\ - \frac{B_{o0}q_o(t) - B_{w0}[w(t) + q_{iw}(t) - q_w(t)] \Delta t}{Vm_o [C_r + (C_w - C_o)S(t) + C_o]} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) = S(t) + \frac{B_{w0}[w(t) + q_{iw}(t) - q_w(t)] \Delta t - \\ - (C_r + C_w)S(t)[P(t + \Delta t) - P(t)]}{Vm_o} \end{aligned} \quad (9)$$

где Δt - шаг по времени.

Дебит притока воды в пласт из водоносной области определяется с помощью модели Фетковича. Можно использовать и другие модели законтурной области, например модель Картера-Трейси или модель Ван Эвердингена и Херста [8].

Дебит скважин по нефти и воде вычисляется через дебит жидкости и обводненность:

$$q_{oi} = q_{li}(1 - WC_i), \quad (10)$$

$$q_{wi} = q_{li}WC_i, \quad (11)$$

где q_{li} - дебит скважины по жидкости, WC_i - обводненность скважины, нижний индекс i - номер скважины.

Так как пластовое давление выше давления насыщения нефти газом, дебит скважин по жидкости определяются для случая забойного давления как выше, так и ниже давления насыщения [9, 10]:

$$q_{li} = K_{oi}(P - P_{wi}), \quad P_{wi} > P_s, \quad (12)$$

$$q_{li} = K_{oi}(P - P_s^*) + J_i(P_s^{*2} - P_{wi}^2)^{n_i}, \quad P_{wi} < P_s, \quad (13)$$

где K_{oi} - коэффициент продуктивности скважины при забойном давлении выше давления насыщения, P_{wi} - забойное давление скважины, P_s - давление насыщения нефти газом, P_s^* - давление искривления индикаторной диаграммы, $P_s^* \leq P_s$, J_i и n_i - коэффициенты, характеризующие совместную фильтрацию жидкости и газа.

Коэффициенты J_i и n_i определяются как функции K_{oi} по результатам гидродинамических исследований скважин [9, 10]:

$$\ln(J_i) = \ln(a) + b \ln(K_{oi}), \quad (14)$$

$$n_i = c - d K_{oi}, \quad (15)$$

где a , b , c , d - коэффициенты зависимости J_i и n_i от K_{oi} , обычно мало меняются по пласту.

Коэффициент продуктивности скважины при забойном давлении выше давления насыщения определяется как:

$$K_{0i} = M_i(t) \frac{2\pi k_i h_i}{\ln\left(\frac{R_c}{r_{wi}}\right) + Skin_i(t)} \left(\frac{k_{roi}(S)}{\mu_o B_o(P)} + \frac{k_{rwi}(S)}{\mu_w B_w(P)} \right), \quad (16)$$

где M_i - корректирующий множитель, учитывающий, например, положение скважины относительно границ и углов ячейки заводнения; k_i - проницаемость пласта; h_i - эффективная мощность пласта; k_{roi} - относительная фазовая проницаемость по нефти в системе вода-нефть; k_{rwi} - относительная фазовая проницаемость по воде в системе вода-нефть; μ_o - динамическая вязкость нефти; μ_w - динамическая вязкость воды; $Skin_i$ - скин-фактор скважины, учитывающий изменение фильтрационных свойств в околоскважинной зоне; r_w - радиус скважины по долоту; R_c - радиус контура питания, который может быть определен по формуле Писмана [11].

Согласно теории Бакли-Левретта, обводненность скважины может быть определена, как:

$$WC_i = \frac{k_{rwi}}{k_{rwi} + k_{roi} \frac{\mu_w B_w}{\mu_o B_o}}, \quad (17)$$

где

$$k_{rwi} = A_i \left(\frac{S - S_{wcri}}{1 - S_{wcri}} \right)^{\alpha_i}, \quad (18)$$

$$k_{roi} = B_i \left(\frac{1 - S_{owcri} - S}{1 - S_{owcri} - S_{wcri}} \right)^{\beta_i}, \quad (19)$$

где S_{wcri} - насыщенность связанной водой; S_{owcri} - насыщенность остаточной нефтью; коэффициенты A_i , B_i , α_i , β_i - определяются по результатам интерпретации исследований керна и могут зависеть от пористости или проницаемости. Они могут варьироваться при адаптации модели к истории работы скважин и различаться по скважинам.

Расход водонагнетательных скважин определяется как:

$$q_{iwj} = K_{0j} (P_{wj} - P), \quad (20)$$

где коэффициент продуктивности K_{0j} определяется по формуле (16), нижний индекс j - номер скважины.

При контроле и регулировании разработки нефтяных месторождений используется многоуровневая система моделей - модель скважины, модель группы скважин, модель пласта (месторождения) [12]. Модель месторождения, находящаяся на верхнем уровне иерархии, представлена детерминированной моделью,

основанной на численной аппроксимации дифференциальных законов сохранения массы, количества движения и энергии. Такие модели называют численными гидродинамическими моделями. Они учитывают неоднородность пласта по площади и по толщине, большое количество различных физических эффектов. Такие модели содержат большое количество расчетных ячеек (от 50 тыс. ячеек для модели на 10-20 скважин до 1 млрд. ячеек для модели на 800-1000 скважин) и требуют больших вычислительных ресурсов, высокой квалификации пользователей. Модель группы скважин и модель отдельной скважины являются более простыми моделями (частично или полностью эмпирическими) и используются для оперативных расчетов. Такие модели называют «суррогатными». Предложенная в статье модель может быть использована как «суррогатная» модель группы скважин.

2. Управление заводнением с помощью ячеек заводнения

Рассмотрим одно из крупных нефтяных месторождений ХМАО. Залежь нефти пластового типа. Она эксплуатируется 116 добывающими и 49 нагнетательными скважинами. Газовой шапки нет. Пластовое давление в процессе разработки не опускается ниже давления насыщения нефти газом. Для управления заводнением залежь была разбита на 47 ячеек и была построена модель материального баланса. Расчет проводился при заданном дебите жидкости на добывающих скважинах и заданной закачке воды на нагнетательных. История разработки 9 лет.

При расчетах приняты следующие основные параметры пласта и насыщающих его флюидов:

1. Средняя эффективная нефтенасыщенная толщина пласта 13,2 м.
2. Пористость 12 %.
3. Начальные геологические запасы нефти 38789 тыс.т.
4. Минимальная проницаемость пласта 6 мД, максимальная проницаемость пласта 915 мД, средняя проницаемость пласта 217 мД, стандартное отклонение проницаемости 223 мД.
5. Сжимаемость пласта $4,3 \cdot 10^{-5}$ 1/атм.
6. Начальное пластовое давление 285,9 атм.
7. Начальная нефтенасыщенность 0,65 д.ед.
8. Объемный коэффициент нефти $1,16 \text{ м}^3/\text{м}^3$, вязкость нефти 0,62 сПз, сжимаемость нефти $1,3 \cdot 10^{-4}$ 1/атм.
9. Давление насыщения нефти газом 98,2 атм., растворимость газа в нефти $73,4 \text{ м}^3/\text{м}^3$.
10. Объемный коэффициент воды $1,02 \text{ м}^3/\text{м}^3$, вязкость воды 0,33 сПз, сжимаемость воды $4,1 \cdot 10^{-5}$ 1/атм.
11. Насыщенность связанной водой 0,35 д.ед., остаточная нефтенасыщенность при вытеснении нефти водой 0,24 д.ед.

Сначала модель адаптировалась по пластовому давлению, рис. 1. Затем по добыче, рис. 2. Кроме того, анализировалась характеристика вытеснения КИН-обводненность (КИН - коэффициент извлечения

нефти), рис. 3. В результате были построены распределения пластового давления и накопленной компенсации добычи закачкой по ячейкам заводнения, рис. 4 и 5. Для некоторых ячеек заводнения наблюдается низкое пластовое давление при высоких значениях накопленной компенсации, что говорит о непроизводительной закачке (заколонных перетоках в нагнетательных скважинах). По ряду ячеек заводнения выявлен уход воды в законтурную область.

По результатам анализа ячеек заводнения были предложены такие мероприятия, как ремонтно-изоляционные работы в нагнетательных скважинах,

перевод добывающих скважин под закачку, регулирование режимов работы нагнетательных и добывающих скважин, обработка призабойных зон и гидроразрыв пласта. Для планирования мероприятий дополнительно привлекались материалы промыслово-геофизических исследований скважин и гидродинамических исследований пластов и скважин.

Кроме того, сделан прогноз показателей разработки для базового варианта (при сложившихся условиях разработки). Прогнозные расчеты проводились на 3 года, см. рис. 2 и 3.

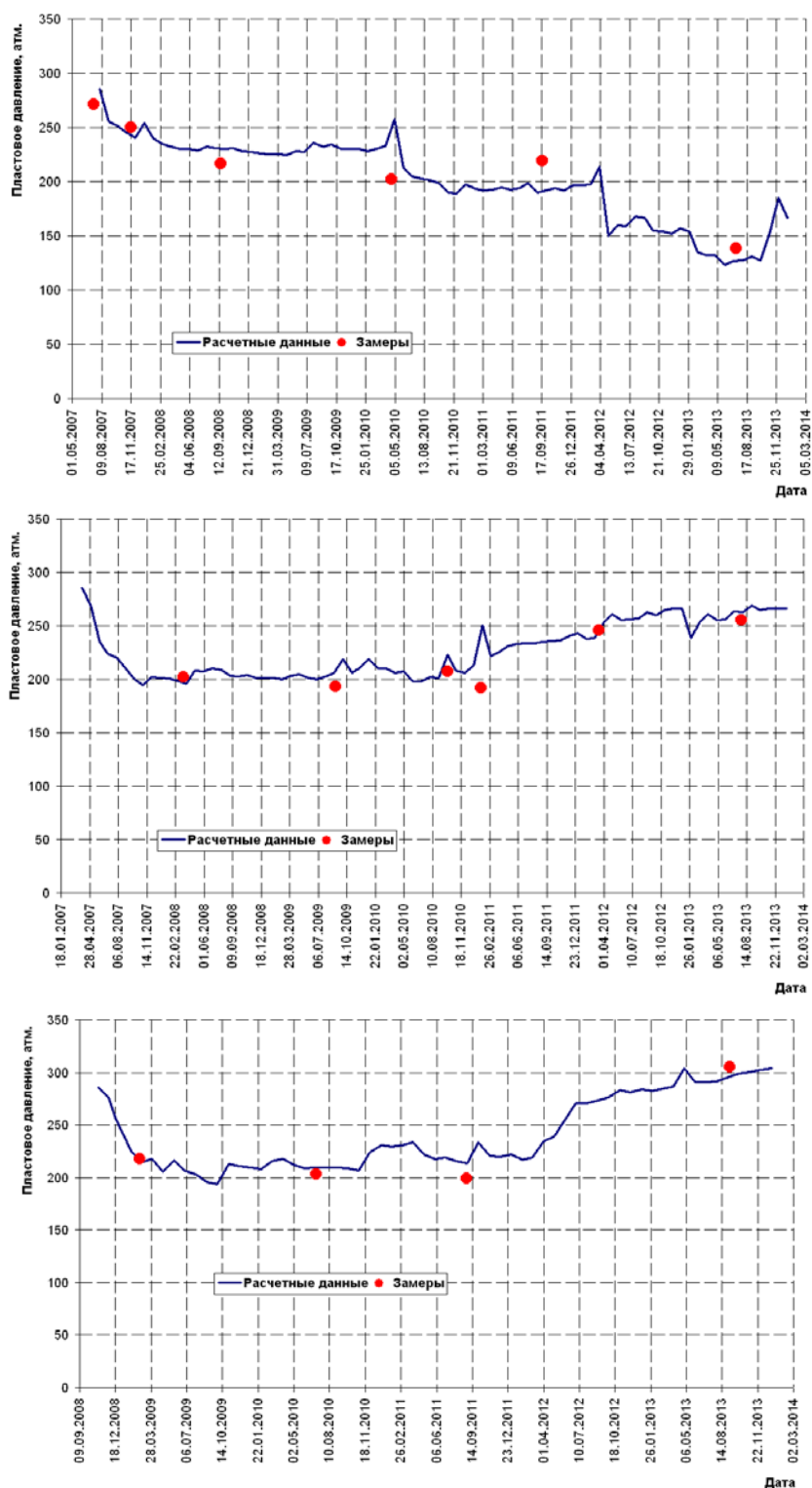
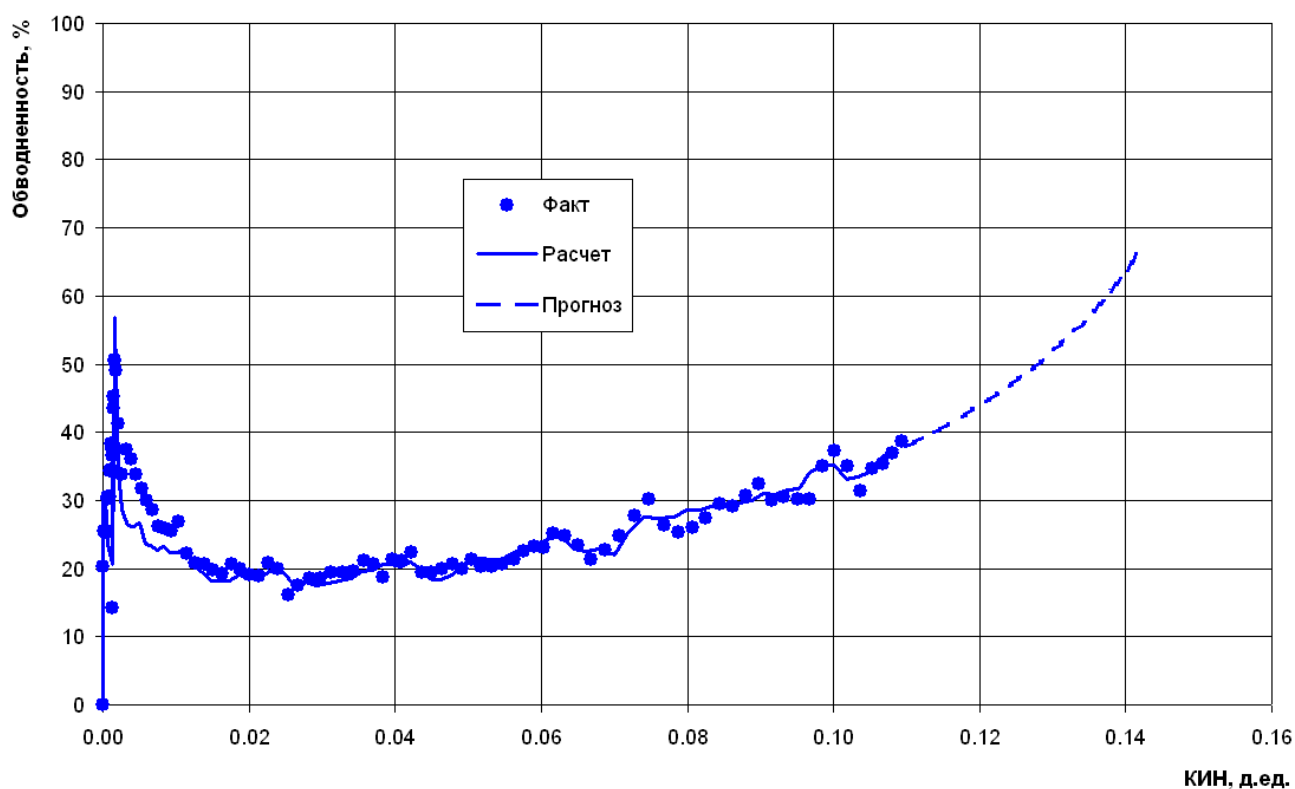


Рис. 1. Адаптация модели по пластовому давлению для трех разных ячеек заводнения



Рис. 2. Адаптация модели по добыче

Рис. 3. Характеристика вытеснения КИН-обводненность
(КИН – коэффициент извлечения нефти)

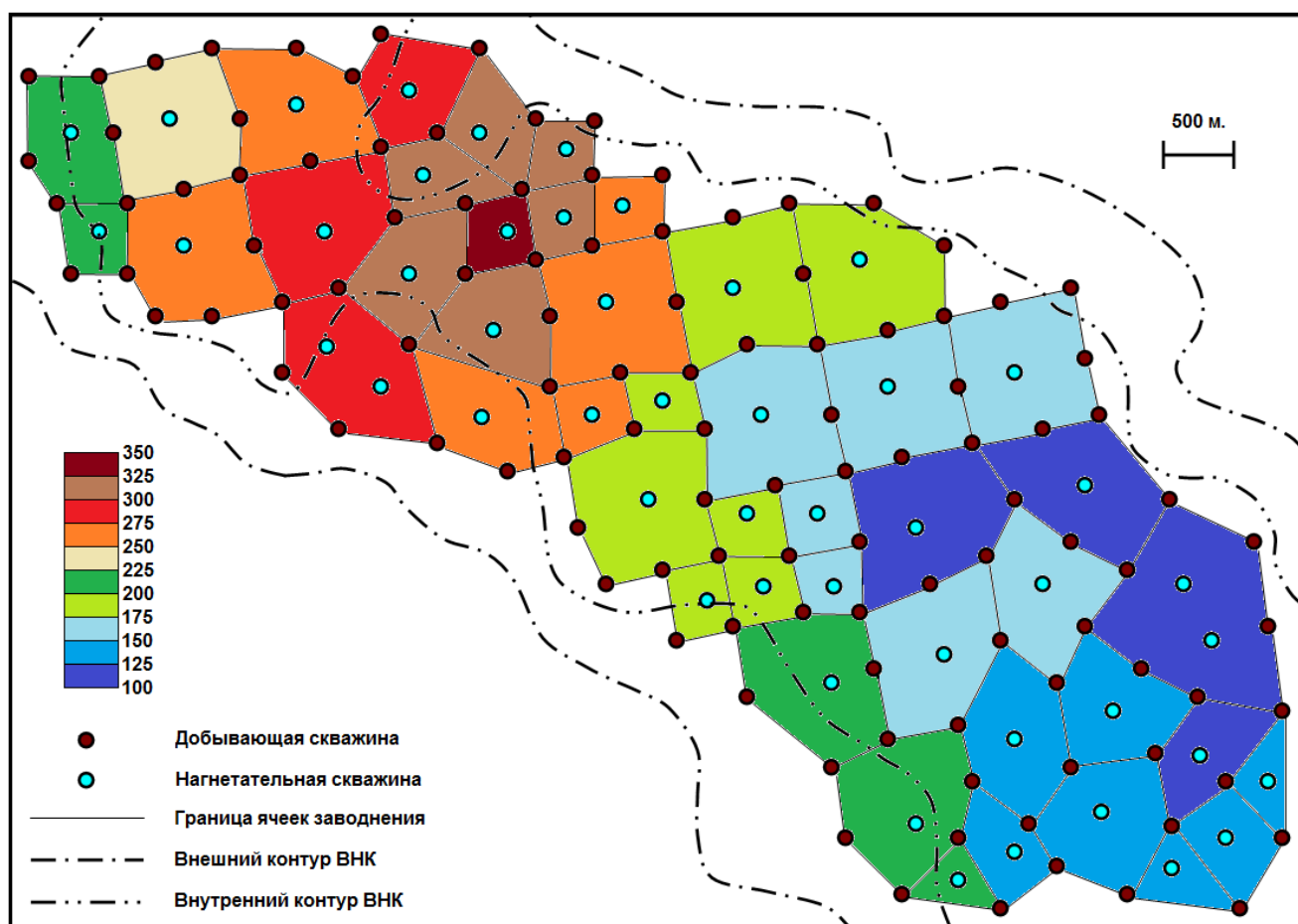


Рис. 4. Распределение пластового давления по ячейкам заводнения на конец истории, атм.

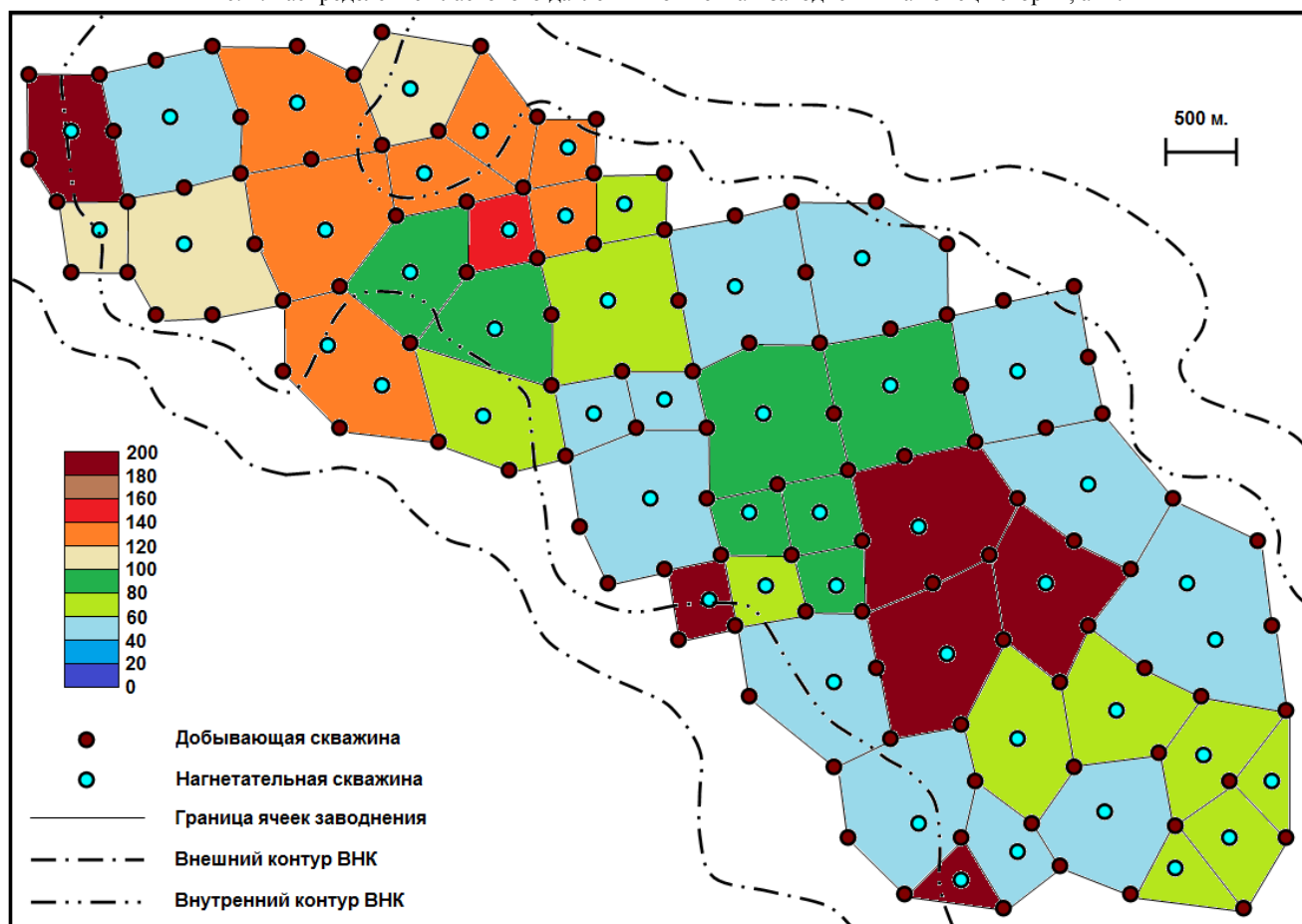


Рис. 5. Распределение накопленной компенсации отбора закачкой по ячейкам заводнения на конец истории, %

3. Построение зон дренирования добывающих скважин

Другой подход к анализу разработки нефтяных месторождений состоит в построении карт на основе зон дренирования добывающих скважин.

Задача построения для каждой скважины рассматриваемого пласта зон дренирования введена А.П. Крыловым при некоторых допущениях: однородность и непрерывность пласта в границах зоны, одинаковые условия эксплуатации всех скважин без освоения системы поддержания пластового давления. Она сводится к построению областей Вороного [7]:

1. Построение выпуклой оболочки по N скважинам путем соединения внешних скважин залежи прямыми линиями.
2. Построение триангуляции на множестве скважин залежи (участка). Пусть залежь вскрывается N скважинами (точками). Триангуляцией на множестве точек N называется такое разделение залежи на участки, когда все точки соединены непересекающимися прямолинейными отрезками так, что любая грань, лежащая внутри выпуклой оболочки N , является треугольником. Построение триангуляции Делоне – триангуляция с построением наиболее равносторонних треугольников.
3. Построение областей Вороного для скважин, включенных в триангуляцию. Область Вороного для каждой точки (скважины) может рассматриваться как совокупность точек плоскости, ближайших к скважине. Каждое ребро многоугольника Вороного строится как перпендикуляр к середине ребра каждого треугольника из полученной триангуляции. Каждая вершина области Вороного будет

находится как точка пересечения трех ребер многоугольников Вороного, рис. 6.

Начальные геологические запасы для зон дренирования определяются объемным методом.

По мере освоения системы заводнения удельные зоны дренирования добывающих скважин будут меняться в соответствии с порядком ввода (перевода) скважин под нагнетание и другими мероприятиями. В таком случае строят две карты зон дренирования – для всех скважин и только для добывающих скважин. Затем карты накладывают друг на друга и определяют, какие доли зон дренирования нагнетательных скважин принадлежат окружающим их добывающим скважинам. Таким образом происходит перераспределение зон дренирования нагнетательных и добывающих скважин.

Текущие запасы для областей дренирования определяются как разность между начальными геологическими запасами и объемами добытой нефти с учетом перераспределения зон дренирования добывающих скважин в процессе разработки.

Для учета разных условий эксплуатации и системы ППД строят карты линий тока. Границы зон дренирования проводят по нейтральным линиям тока.

На основании зон дренирования строятся карты начальных геологических запасов нефти, извлекаемых запасов нефти и остаточных извлекаемых запасов нефти, а также карты текущей и конечной нефтеотдачи. С их помощью анализируется степень выработанности участков пласта, планируется проведение дополнительных исследований скважин с целью определения причин низких показателей разработки и составляется программа геолого-технических мероприятий для интенсификации добычи нефти и повышения нефтеотдачи пласта.

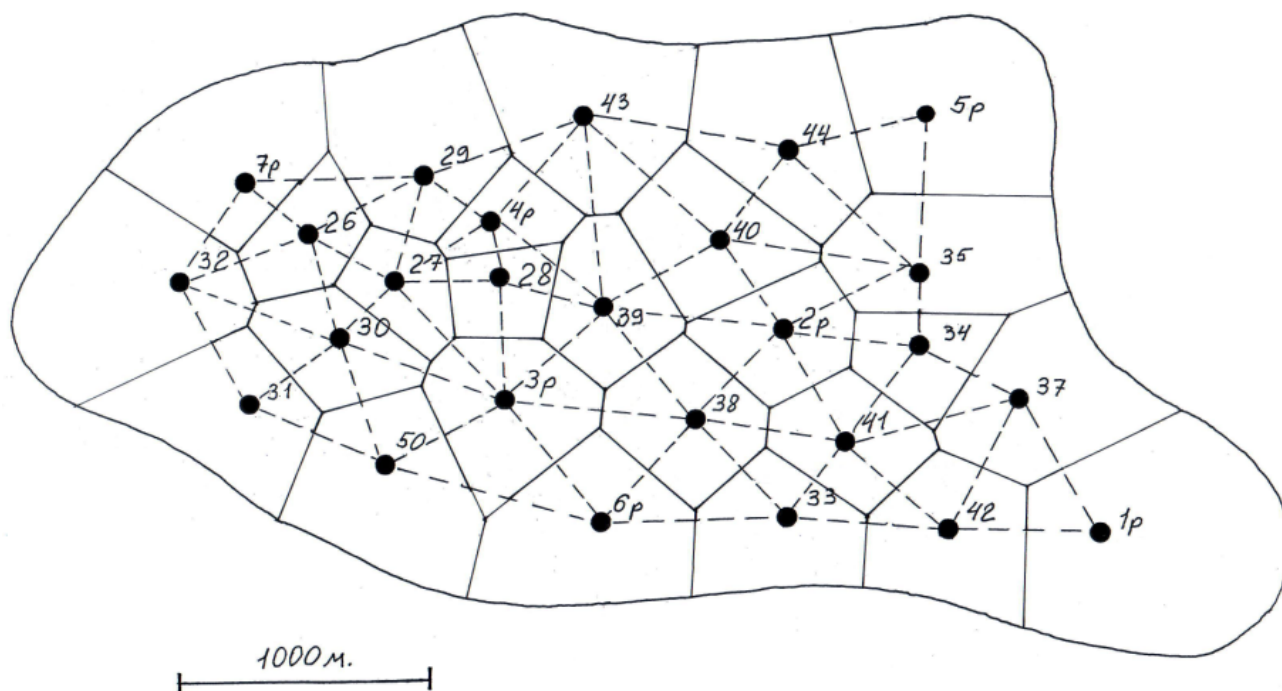


Рис. 6. Построение зон дренирования добывающих скважин

4. Анализ разработки нефтяных месторождений с помощью выделения зон дренирования

Рассмотрим анализ разработки нефтяных месторождений с помощью выделения зон дренирования на примере небольшого нефтяного месторождения ХМАО. Месторождение представлено одним пластом с подстилающей водой. Пробурено 26 скважин. Системы поддержания пластового давления нет.

Для анализа разработки по схеме, указанной на рис. 7, построены несколько карт на основе зон дренирования. Построена карта текущего дебита нефти, рис. 8. На этой карте найдены скважины с низким текущим дебитом нефти. Для определения причин низкого значения дебита нефти построены карты дебита жидкости, рис. 9, и обводненности, рис. 10. Низкий дебит нефти может быть связан с низким дебитом жидкости либо с высокой обводненностью продукции скважины.

Высокая обводненность продукции скважины может быть связана либо с прорывом воды в скважину без заводнения большей части зоны дренирования (образование конуса подошвенной воды, латеральный прорыв воды по высокопроницаемому пропластку, заколонный переток воды), либо с тем, что зона дренирования скважины выработана и заводнена. Для оценки степени выработанности зоны дренирования построены карты различных видов запасов (начальных геологических – рис. 11, извлекаемых, остаточных извлекаемых - рис. 12) и нефтеотдачи. Извлекаемые запасы оценены по характеристикам вытеснения, построенным на основе исторических данных до катастрофического обводнения. Большие остаточные извлекаемые запасы и низкая текущая нефтеотдача при высокой обводненности продукции говорят о прорыве

воды в скважину без заводнения большей части зоны дренирования. Для определения источника поступления воды и принятия мер к его ликвидации необходимо проведение дополнительных исследований (например – промыслово-геофизических).

Низкий дебит жидкости может быть связан с низким коэффициентом продуктивности (рис. 13) или низкой депрессией на пласт (рис. 14). Низкая депрессия на пласт может быть вызвана низким пластовым давлением (рис. 15) или высоким забойным давлением (рис. 16).

Для оценки потенциала скважины проводится сравнение теоретического и расчетного коэффициента продуктивности. Теоретический коэффициент продуктивности определяется по формуле (16) при $M_i=1$. При этом относительные фазовые проницаемости определяются на основании данных об обводненности и кривой Бакли-Левретта, а скин-фактор – на основании исследования методом восстановления давления или принимается как среднее значение по пласту либо рассчитывается на основании графика скин-фактор-проницаемость, построенного по данным гидродинамических исследований скважин пласта. Фактический коэффициент продуктивности определяется по результатам специальных исследований скважин на стационарных режимах, либо путем анализа данных телеметрических систем при работе скважины. Существенное отклонение фактического коэффициента продуктивности от расчетного может являться основанием для проведения гидродинамических исследований скважины с целью определения текущих параметров удаленной зоны пласта и окоскважинной зоны.

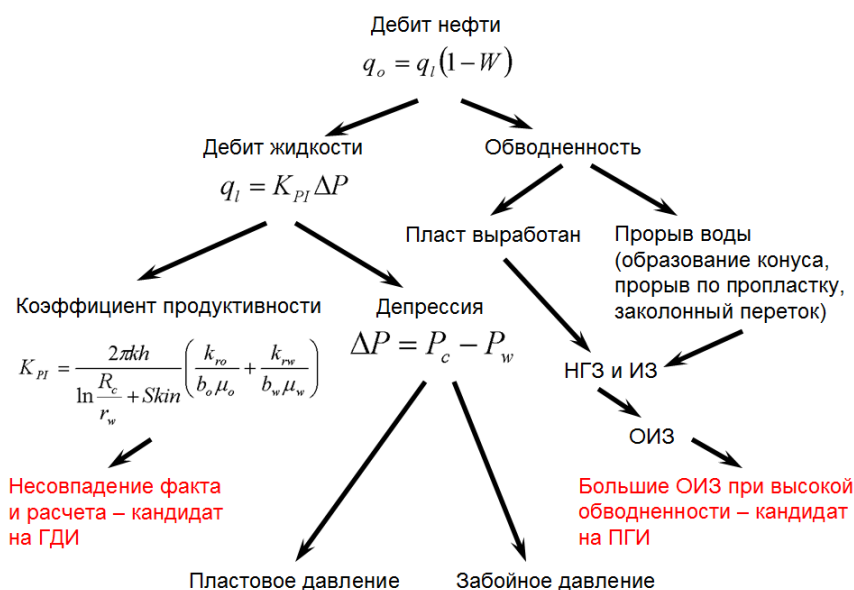


Рис. 7. Схема анализа разработки с помощью выделения зон дренирования скважин

(ГДИ – гидродинамические исследования скважин, НГЗ – начальные геологические запасы нефти, ИЗ – извлекаемые запасы нефти, ОИЗ – остаточные извлекаемые запасы нефти, ПГИ – промыслово-геофизические исследования скважин)

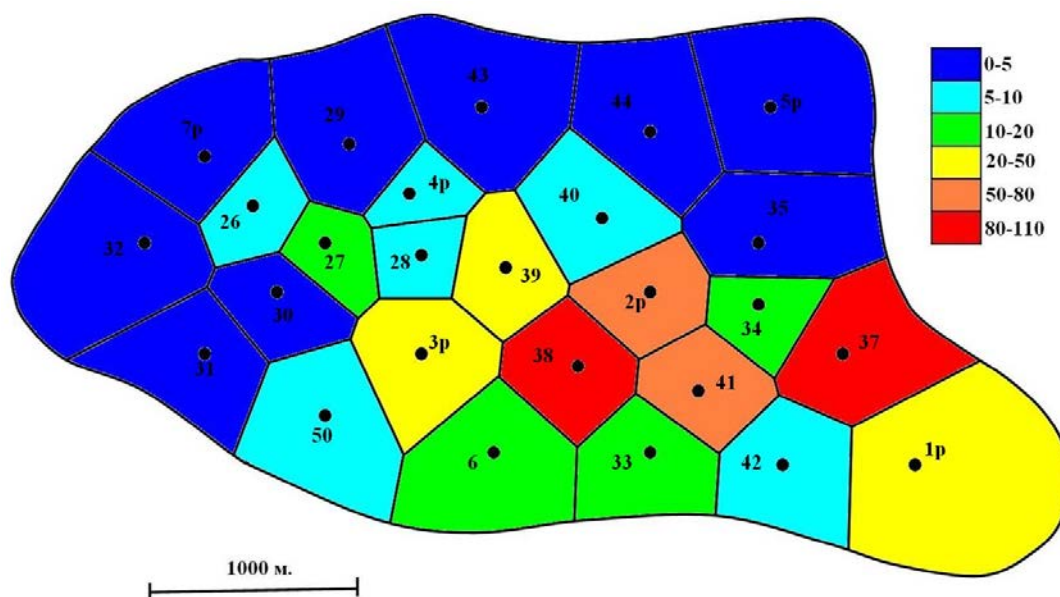
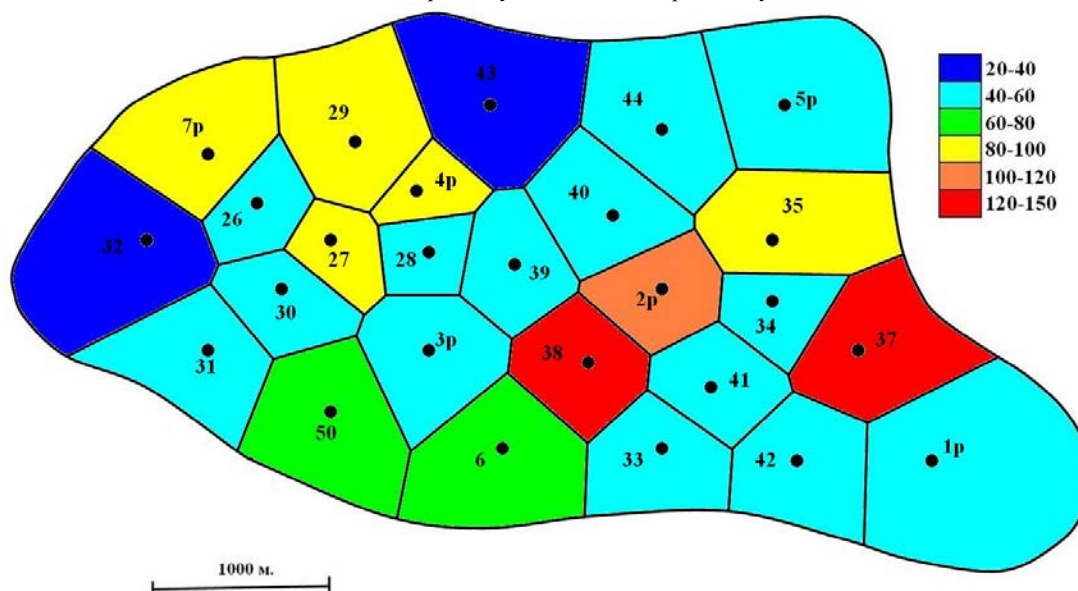
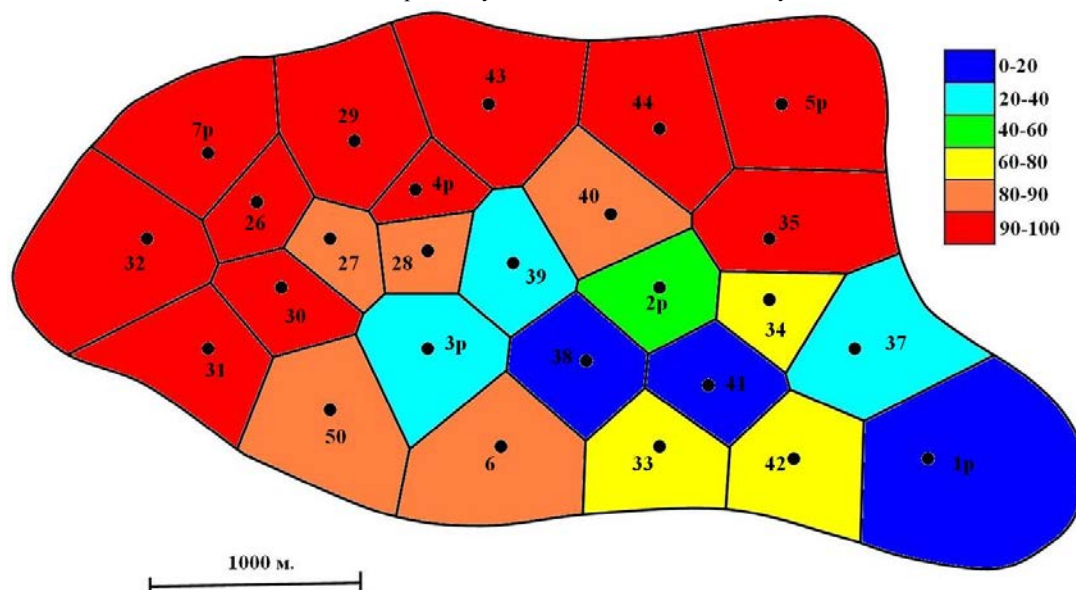
Рис. 8. Карта текущего дебита нефти, $\text{м}^3/\text{сут}$ Рис. 9. Карты текущего дебита жидкости, $\text{м}^3/\text{сут}$ 

Рис. 10. Карта текущей обводненности, %

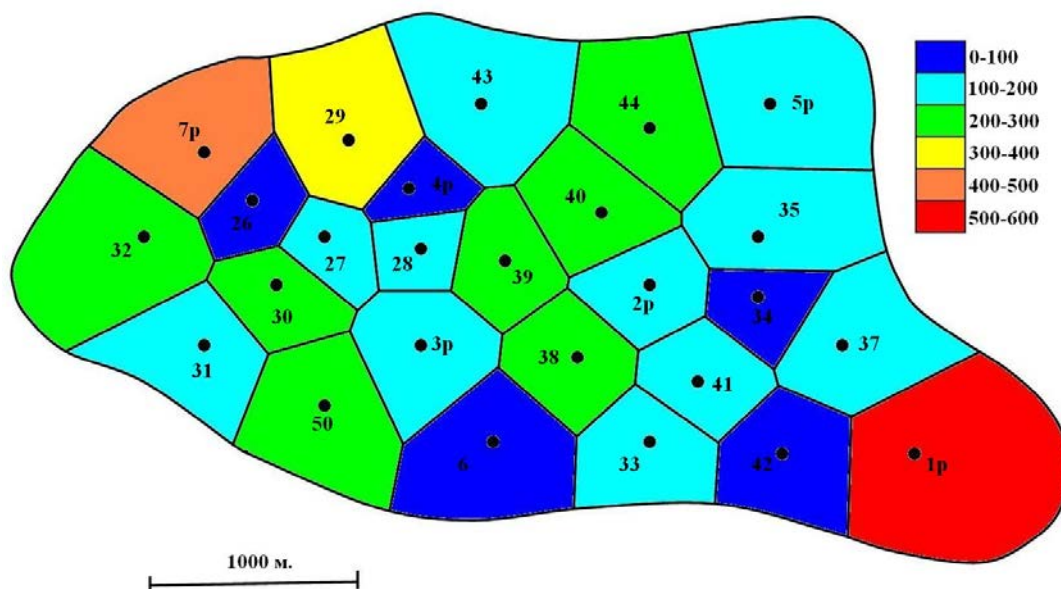


Рис. 11. Начальные геологические запасы нефти, тыс.т.

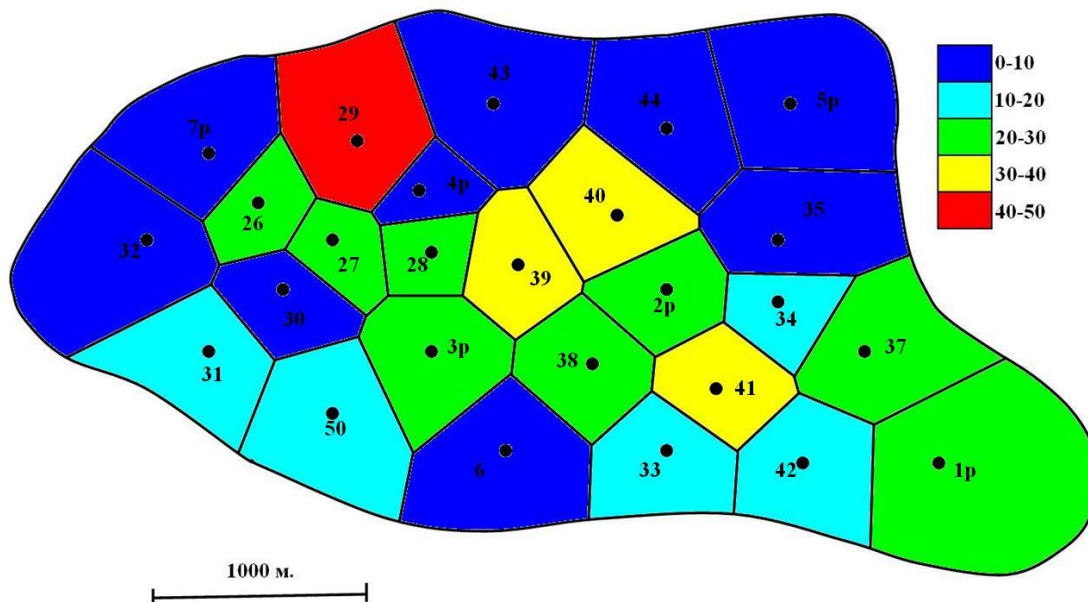


Рис. 12. Остаточные извлекаемые запасы нефти, тыс. т.

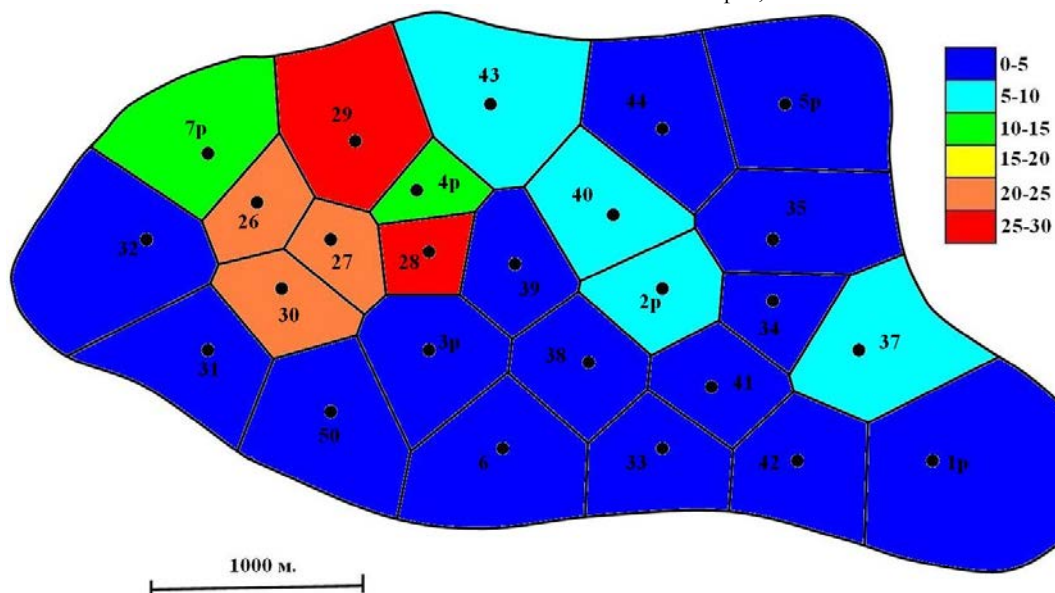


Рис. 13. Текущий коэффициент продуктивности, м³/сут/атм

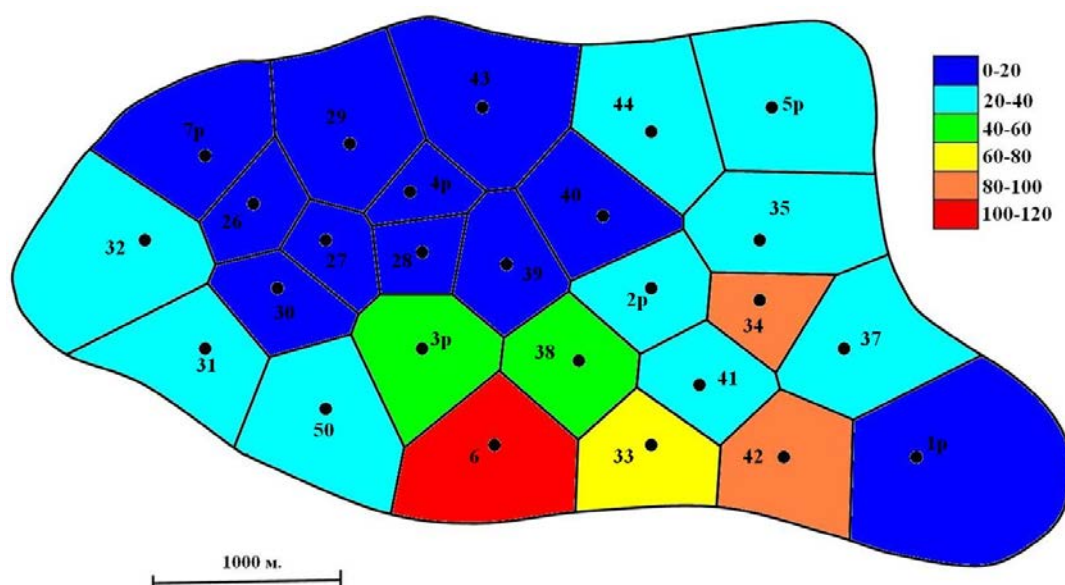


Рис. 14. Текущая депрессия на пласт, атм.

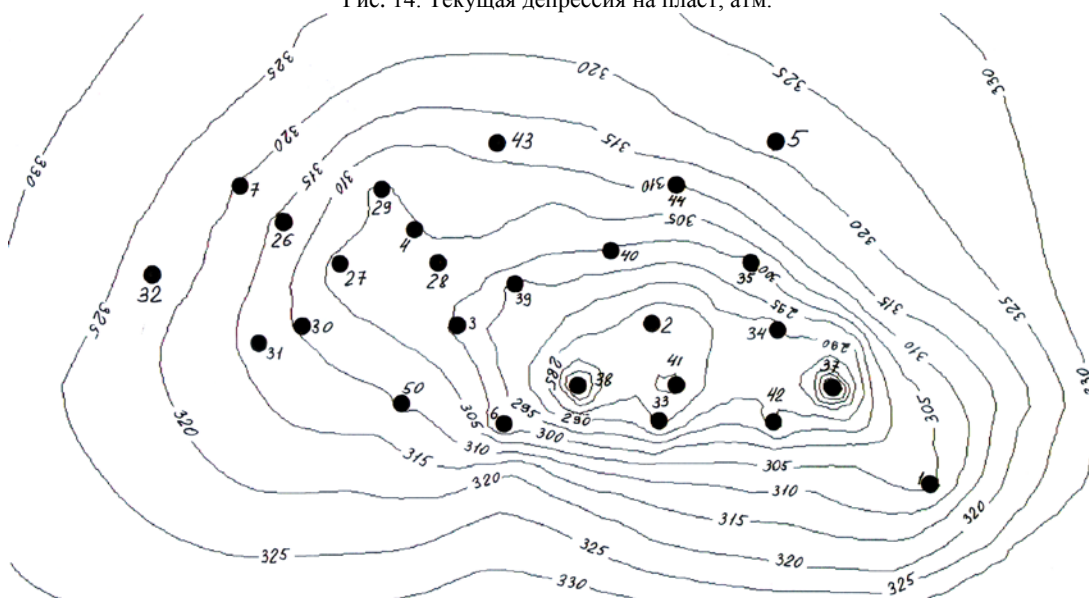


Рис. 15. Пластовое давление, атм.

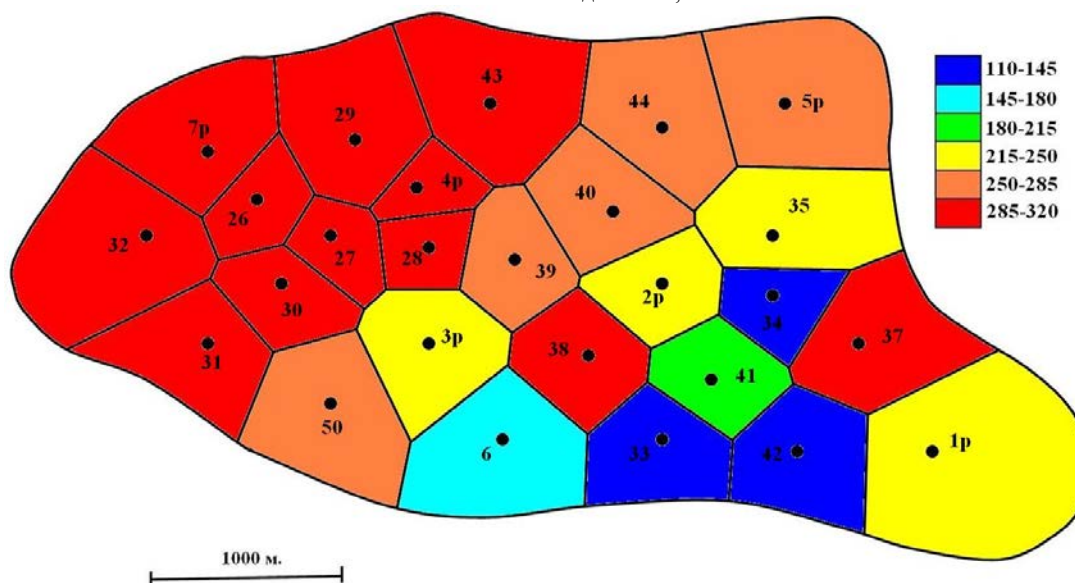


Рис. 16. Забойное давление, атм.

Заключение

В работе рассмотрена концепция ячеек заводнения. Приведена модель разработки участка нефтяного пласта группой скважин на основе концепции материального баланса при двухфазной фильтрации нефти и воды. Даны ограничения рассматриваемой модели. Рассмотрен пример управления заводнением с использованием модели материального баланса. Освещены вопросы выделения зон дренирования добывающих скважин и дан пример анализа разработки нефтяных месторождений с помощью выделения зон дренирования.

В отличие от других моделей материального баланса, предлагаемая в статье модель учитывает изменение насыщенности пласта со временем, индивидуальные особенности работы скважин и

работу скважин при забойном давлении ниже давления насыщения. Она позволяет не только уточнять начальные запасы нефти и прогнозировать изменение пластового давления, но и прогнозировать добычу нефти и воды в целом по группе скважин.

Предложенная в статье модель может быть использована как «суррогатная» модель группы скважин.

Предложенный метод анализа разработки нефтяных месторождений с помощью выделения зон дренирования позволяет быстро строить карты различных параметров и оценивать эффективность разработки объекта.

Some graphical methods of production analysis on oil fields

I.V. Afanaskin

Abstract: Some graphical methods of production analysis are discussed. Flooding cells concept and corresponding material balance equations are described. It is proposed that formation pressure is above the bubble point, but the bottom-hole pressure can have any value with respect to bubble point pressure. Some applications of flooding cells concept in production analysis are presented.

Keywords: production analysis, flooding cells, material balance model, well drainage zone.

Литература

1. Управление разработкой пласта. «TGL Reservoir Engineering Group», 2010.
2. И.Ф. Хатмуллин, Е.И. Хатмуллина, А.Т. Хамитов и др. Технология решения типовых задач по оптимизации заводнения. «Оптимизация заводнения на зрелых месторождениях»: Труды технической конференции SPE, 2013.
3. Acel. БАСПРО. <http://www.baspro.ru/Acel>
4. Атлас – Управление заводнением. ЗАО «ТИНГ». <http://www.togi.ru/WaterFlooding>
5. OFM Well and Reservoir Analysis Software. Schlumberger. <http://www.software.slb.com/products/foundation/pages/ofm.aspx>
6. И.Д. Амелин, М.Л. Сургучев, А.В. Давыдов. Прогноз разработки нефтяных залежей на поздней стадии. М., «Недра», 1994.
7. Н.И. Хисамутдинов, М.М. Хасанов, А.Г. Телин и др. Разработка нефтяных месторождений. Издание в 4 т. – Т. 1. Разработка нефтяных месторождений на поздней стадии. М., ВНИИОЭНГ, 1994.
8. Х. Азиз, Э. Сеттари. Математическое моделирование пластовых систем. М.-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
9. Н.Н. Диева, С.Г. Вольпин, Д.А. Корнаева и др. Повышение информативности исследований скважин, работающих при забойном давлении ниже давления насыщения, методом установившихся отборов. «Бурение и нефть», 2014, № 1, 41 - 43.
10. Д.А. Корнаева. Совершенствование методов ГДИ скважин, работающих при забойном давлении ниже давления насыщения. «Инженерная практика», 2013, № 9, 14 - 16.
11. D.W. Peaceman. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. «SPE Journal», 1983, V. 23, № 3, 531 - 543.
12. В.Б. Бетелин, С.Г. Вольпин. Отраслевой закон о промышленной политике прямого действия для нефтегазовой отрасли – необходимое условие создание отечественной технологии «Цифровое месторождение». «НефтеГазоПромысловый ИНЖИНИРИНГ», 2013, № 8, 70 - 77.

Проблемы и задачи изучения углеводородов баженовской свиты для применения метода термогазового воздействия

К.Д. Ашмян¹, В.А. Юдин², А.В. Королёв³, Д.Т. Миронов⁴, И.В. Афанаскин⁵, С.Г. Вольпин⁶

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,

E-mail's : ¹kdashmyan@yandex.ru ²yudinval@yandex.ru, ³alexandre.korolev@mail.ru ,

⁴dmitri.mironov@tns-simcor.com, ⁵ivan@afanaskin.ru , ⁶sergvolpin@gmail.com

Аннотация: Рассмотрены основные проблемы и задачи изучения углеводородов баженовской свиты для применения метода термогазового воздействия (ТГВ). Показана необходимость исследований при ТГВ физико-химических превращений содержащихся в породах углеводородов нестандартными методами. Изучение при ТГВ подобных превращений добытой нефти может проводиться с разделением на фракции на основе существующей, апробированной и стандартизированной отечественной методики.

Ключевые слова: Увеличение нефтеотдачи, термогазовое воздействие, экзотермические превращения, массоперенос, фазовые превращения, остаточная нефть, низкотемпературное окисление, высокотемпературное горение, структура нефтенасыщенных пород.

Введение

Одним из перспективных способов разработки нетрадиционных и трудноизвлекаемых запасов углеводородов является метод с закачкой в пласт воздуха. Метод существует в двух вариантах: низкотемпературного окисления и высокотемпературного горения [1, 8]. Первый, названный по предложению А.А. Боксермана в 1971 г. «термогазовым воздействием» (ТГВ) и имеющий отечественный приоритет [15, 16], основан на закачке кислородосодержащей смеси, в частности воздуха или водовоздушной смеси, в нефтесодержащие породы с повышенной начальной пластовой температурой (более 60-65°C) или более низкой (до 40-45°C) - в случае присутствия в породе-коллекторе катализаторов самопроизвольного окисления нефти. Именно использование природного фактора, обеспечивающего активные самопроизвольные окислительные процессы, является основной отличительной особенностью термогазового способа разработки нефтяных месторождений. В результате этих процессов происходит внутрипластовая трансформация закачиваемого газового агента в эффективный смешивающийся с пластовой нефтью вытесняющий агент. Кроме того, генерируется тепловая энергия, положительно воздействующая на фильтрационно-емкостные свойства породы и содержащуюся в ней нефть. Таким образом, при термогазовом воздействии реализуются основные особенности механизмов как тепловых, так и газовых МУН. Во-первых, за счет формирования высокоэффективного вытесняющего агента с высокими вытесняющими способностями значительно снижается остаточная нефтенасыщенность в пласте, во-вторых, происходит процесс фильтрации, как окислителя (воздуха), так и

дымовых газов (в основном азота) через продукты окисления нефти. Данное явление в других областях техники известно под названием фильтрационного горения. Оно должно сопровождаться распространением волн экзотермического превращения нефти в пористой среде и имеет хорошо изученные прототипы, как в природе (тление, подземные пожары), так и в технологических процессах металлургии и т.д. Уникальной способностью волн экзотермических превращений в пористой среде является их способность концентрировать энергию окисления (сгорания) топлива, в результате чего температура в зоне реакции может достигать значений в несколько сот градусов (зафиксировано до 1000°C). Выгорание некоторых компонентов скелета породы (а в отложениях типа баженовской свиты - углеводородной составляющей) приводит к изменению структуры «пористой среды», в результате чего пористость, теплопроводность и проницаемость заметно изменяются [3].

Отличительной особенностью гидродинамического моделирования пластовых процессов при ТГВ, являющегося необходимой составной частью его проектирования и регулирования [1], является необходимость создания численных моделей основных процессов, происходящих при данном способе добычи: массопереноса различных пластовых флюидов, фазовых переходов между ними, термохимических реакций, распространения тепла, генерируемого в реакциях окисления, изменения свойств пород и пластовых флюидов под воздействием высоких температур [1]. При этом моделирование реакций окисления имеет решающее значение, поскольку именно в результате этих реакций образуется углекислый газ, который повышает коэффициент вытеснения нефти из пласта [1, 8].

Известно, что окисление парафиновых углеводородов молекулярным кислородом приводит к образованию большого числа промежуточных и конечных кислородсодержащих продуктов: перекисей, спиртов, карбонильных соединений, кислот, эфиров и др.

Реакции окисления органических углеводородов пластовой нефти – это сложный термохимический процесс, который, в принципе, может быть выражен с помощью уравнений цепных реакций. Однако, для природных нефтей, ввиду крайней сложности их состава, многообразия типов углеводородных соединений в нефти, наличия в ней металлоорганических соединений (являющихся катализаторами высокотемпературных реакций), составить полную систему уравнений соответствующих реакций невозможно, особенно из-за наличия не только прямых цепей, но и разветвленных, оборванных и т.д.

Таким образом, заранее предсказать, какие химические реакции окисления будут иметь место, нельзя, а, следовательно, нельзя и подсчитать термический эффект, полученный в результате окисления, хотя в ряде работ такие расчеты приводятся [14]. Поэтому получение исходных данных для моделирования химических реакций возможно только в результате проведения цикла экспериментальных работ на образцах пород и нефтей [8].

Однако при получении исходных данных для численного моделирования процессов, происходящих при ТГВ, (как и для большинства «третичных методов увеличения нефтеотдачи») почти всегда игнорируют одно, весьма существенное, обстоятельство. Практически в любом коллекторе, даже классическом, например, в девонских песчаниках Волго-Уральской провинции, не извлекаемая на поверхность «остаточная» нефть по своему химическому составу и физическим свойствам отличается от добываемой на устье скважины. Этот факт известен ещё с 70-х годов прошлого столетия [13].

1. Различие остаточной и добываемой нефти

Для подобного отличия существует ряд факторов, из которых упомянем два наиболее очевидных:

- а. изменение условий термодинамического равновесия смеси различных компонентов пластовой нефти, вызывающее их сегрегацию в пласте и, особенно, в прискважинной зоне (выпадение парафинов из сильно парафинистых нефтей, например);
- б. пространственное разделение нефти в порах за счёт действия поверхностных сил скелета породы [13] и обогащение приповерхностных слоёв нефти поверхностно-активными, в том числе, полярными, углеводородными соединениями. Однако, при любых «третичных» методах повышения нефтеотдачи именно не вытесненная с применением традиционных методов нефть является объектом химического или физического воздействия [11].

При ТГВ в нетрадиционных коллекторах типа баженовской свиты положение ещё сложнее. Наряду со сравнительно лёгкой подвижной нефтью, заполняющей связанное пустотное пространство породы, скелет содержит органическое вещество (ОВ). Это вещество состоит из двух частей: твёрдой органики, не растворимой в органических растворителях и называемой «керогеном», и малоподвижных углеводородов, которые можно извлечь из породы органическим растворителями, и называемых «битумоидами» [12].

Реальная (классическая в общепринятой формулировке) остаточная нефть в баженовской свите может встретиться на участках, где получены нефти средней и высокой плотности [10]:

1. «средние» нефти, плотность которых изменяется в пределах 0,825-0,866 г/см³, выход легких фракций – 19,0-30,0%, содержание смол – 2,04-6,67%, асфальтенов – 0,10-1,69%;
2. «тяжелые» нефти – с высокой плотностью (0,871-0,908 г/см³), которые имеют высокие температуры кипения (более 100°C). В них нет самых легких фракций и в большинстве содержится много асфальтенов.

Наиболее тяжёлые фракции этих нефтей останутся в породе, как это происходит в иных коллекторах нефтяных месторождений.

Кроме того, в кернах пород баженовской свиты наблюдались практически замкнутые поры между минеральными агрегатами и внутри отдельных минералов, заполненные углеводородами и углеводородными гетероатомными соединениями, причём объём таких пустот составлял 10-20% от объёма открытых пор [9].

Породы баженовской свиты гидрофобны [4, 9, 10], то есть поверхность пустот покрыта плёнкой поверхностно-активных углеводородов, в том числе, металлопорфириновых комплексов, которые могут служить катализаторами при окислительных реакциях углеводородов.

Воздействие окислителя (воздуха) при ТГВ осуществляется на все существующие в такой породе углеводороды: подвижную нефть, кероген и битумоиды, остаточную нефть и углеводородные соединения, связанные с поверхностью породы.

В то же время, анализы для получения исходных данных при планировании третичных методов повышения нефтеотдачи или ТГВ обычно проводятся с добытой нефтью, то есть с нефтью, которая притекла к призабойной зоне скважины и была отобрана из скважины для определения PVT и других физико-химических свойств. Это так называемая «скважинная нефть». В ней содержится мало тяжелых высокомолекулярных битуминозных компонентов. Параметры скважинной нефти и той смеси углеводородов, которая содержится в породе первоначально, могут заметно отличаться.

Изучение физико-химических процессов, происходящих при воздействии на «остаточную нефть» или на органическое вещество в скелете пород баженовской свиты, является сложной задачей, требующей создания специальных методов

исследования; при этом необходимо отметить, что совершенствование или заимствование зарубежных методик не всегда приемлемо, так как в них также не учитывается сложность строения залежей и компонентного состава пластовой нефти таких сложных объектов, как баженовская свита.

Очевидно, что исследование химических реакций окисления и пиролиза необходимо проводить не на нефтях, полученных на устье скважины, а на кернях, содержащих все виды имеющихся в породе органических веществ. Иными словами – на кернях, герметизированных на устье скважины, либо, что предпочтительнее, на кернях, отобранных на забое герметизирующими керноотборниками. Методика таких исследований пока не создана и нуждается в тщательной лабораторной проработке.

2. Основные особенности методов исследований органического вещества баженовской свиты

Большинство из опубликованных исследований проведено на небольших химических реакторах, с использованием моделей пластовой нефти в смеси с отмытыми и размолотыми кернами [8], по большей части – при атмосферном давлении. Представляется, что более корректная методика должна содержать следующие основные этапы:

- ✓ На забое скважины отбирается керн с применением герметизирующих керноотборников;
- ✓ Герметичный керн доставляется в лабораторию в специальных контейнерах;
- ✓ В лаборатории давление в керне постепенно снижается со скоростью, которая сведёт к минимуму риск растрескивания или разрушения керна;
- ✓ Газы и жидкость, выходящие из керна при снижении давления, собираются и в дальнейшем их количество и состав анализируются;
- ✓ Образцы керна (по отдельности или в виде составного образца) помещаются в специальную установку для исследования фильтрационных и химических процессов.

Фактически основной проблемой является конструирование и создание специальной исследовательской установки. Эта установка, представляющая собой синтез установок типа УИПК (установка измерения проницаемости керна), дифференциального сканирующего калориметра и малогабаритного химического реактора, в идеале должна обеспечить:

- Создание давления обжима керна, равного горному давлению в пласте.
- Создание в керне давления, соответствующего его пластовому значению.
- Возможность фильтровать через керн воду, нефть, воздух, CO_2 , N_2 и иные флюиды, необходимые для исследования.
- Для изучения пиролиза углеводородов – возможность создания и поддержания в керне

определённой заданной температуры и её изменения по заранее заданному закону.

- Для изучения реакций окисления (и горения) углеводородов в керне – возможность измерения количества тепла, выделяющегося при реакциях.
- Возможность аккумулировать, измерять количество и анализировать состав продуктов реакций, происходящих при прокачке через керн воздуха (чистого или обогащённого кислородом), а также воды, закачка которой рекомендуется в некоторых вариантах ТГВ [1].

Варианты некоторых установок, частично удовлетворяющих отдельным из перечисленных требований, приведены в обзоре [8].

Очевидно, что составными частями такой установки должны быть системы:

- создания и изменения по выбранному закону температуры и давления в экспериментальной ячейке,
- измерения давления и температуры в нескольких точках по длине измерительной ячейки,
- подачи и измерения расхода прокачиваемого через керн флюида,
- сбора и сепарации газов и жидкости, получаемых в результате происходящих в керне реакций,
- измерения количества и состава газов и жидкости, получаемых в результате происходящих в керне реакций.

Представляется, что методика исследования образцов состоит в разделении коллекции образцов на две части. В первой проводится общепринятый комплекс исследований керна, в частности:

- описание литолого-структурных особенностей и коллекторских свойств пород-коллекторов и плотных пропластков;
- определение пористости;
- определение газопроницаемости;
- определение плотности объемной и минералогической.

Необходимы также углублённые исследования этой части коллекции керна для получения данных, используемых как для разработки метода ТГВ, так и для проектирования и последующего регулирования разработки, в частности:

- высокоточная гранулометрия (например, методом лазерного дифракционного анализа);
- определение абсолютной газопроницаемости при атмосферных и пластовых условиях;
- изучение влияния эффективного давления на газопроницаемость пород;
- определение трещинной газопроницаемости при атмосферных и пластовых условиях;
- оценка доли трещинной проницаемости трещинно-пористых образцов в атмосферных и пластовых условиях;
- определение пористости по керосину в атмосферных и пластовых условиях;
- определение сжимаемости порового пространства, скелета породы в пластовых условиях;
- определение пористости по газу при атмосферных и пластовых условиях;

- изучение динамики изменения пористости при разных эффективных давлениях;
- исследование распределения радиусов поровых каналов методом центрифугирования;
- определение полной удельной поверхности порового пространства;
- микроописание шлифов и порового пространства;
- определение динамических упругих модулей Юнга, сдвига, коэффициента Пуассона, модуля деформации;
- определение нефтенасыщенности непосредственно в породе импульсным методом ядерного магнитного резонанса;
- определение вязкости нефти (желательно, непосредственно в породе);
- определение смачиваемости пород;
- выделение термовесовым методом различных форм влагонасыщенности: кристаллизационной, прочносвязанной, слабосвязанной, рыхлосвязанной, свободной;
- определение полного пустотного объема каверн порового пространства, отдельно порового и кавернового.

Кроме того, необходимо провести отделение углеводов от минеральной части скелета и определение состава начальной (до воздействия) пластовой углеводородной смеси хроматографическими и иными методами [12].

На второй части коллекции должны быть проведены исследования химических реакций пиролиза и окисления пластовой углеводородной смеси при различных постоянных температурах, скоростях прокачки воздуха, при разных заранее выбранных законах нарастания температур, а также в случае прокачки воздуха без принудительного регулирования температуры. При этом должны регистрироваться количества и состав образующихся продуктов реакции, а в случае нерегулируемой температуры керна – температуры и количества выделяющегося при реакциях тепла.

После прекращения реакций на кернах должны быть выполнены исследования, проведенные для первой части коллекции.

Сопоставление усреднённых данных по измерениям и исследованием первой и второй частей коллекции позволит оценить степень изменения пористости, проницаемости, характера пустотного пространства, а также получить информацию для составления усреднённой модели химических реакций, вызванных прокачкой воздуха.

На подобной установке могут быть проведены и сходные исследования для различных иных методов увеличения нефтеотдачи.

Однако существуют и более простые геолого-технологические ситуации, в том числе, при разработке и применении ТГВ. Если породы являются «классическими» и не содержат в скелете органического вещества; поверхность породы сравнительно малоактивна или имеет незначительную площадь (отсутствуют глины, мелкозернистые аргиллиты и алевролиты); нефти сравнительно лёгкие; при добыче нефти термодинамические условия в

прискважинной зоне таковы, что не происходит выделения свободного газа, выпадения парафинов и т.п. явлений, то можно с небольшой погрешностью считать, что компонентный состав подвижной нефти в пласте практически соответствует компонентному составу нефти, получаемой из скважины. Тогда изучение реакций пиролиза и окисления пластовых углеводородов для последующего моделирования может проводиться не на кернах, а на смеси нефти с размолотым керном [8].

При исследовании реакций окисления нефтей в таких условиях выяснилось, что максимумы окисления и тепловыделения лёгких и тяжёлых фракций наблюдаются при разных температурах [5–8]. Соответственно, при исследовании реакций окисления нефти на дифференциальном сканирующем калориметре высокого давления [5] на измеренной зависимости тепловыделения от температуры наблюдаются два пика (рис. 1 [5]), соответствующие низкотемпературному окислению и окислению при более высоких температурах. В лёгких нефтях первый пик выше второго, ввиду преобладания в нефти лёгких фракций и большей их значимости при тепловыделении за счёт реакций **низкотемпературного окисления**. В тяжёлых нефтях – второй пик имеет большую амплитуду, поскольку он соответствует окислению высокомолекулярных фракций нефти (смолы, асфальтены), то есть **высокотемпературному горению** тяжёлых фракций нефти.

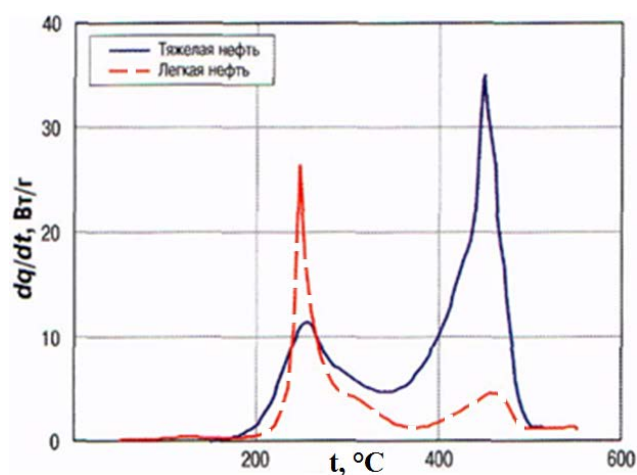


Рис. 1. Характерный вид кривых зависимости тепловыделения от температуры для лёгкой (Западная Сибирь) и тяжёлой (Венесуэла) нефтей [5]

Соответственно, основываясь на этом факте, при моделировании целесообразно разделить нефть на ряд фракций, отличающихся по положению пика тепловыделения, иными словами, по характеру химических реакций окисления [8].

Для целей переработки нефти «разбивку» состава жидкой фазы пластовых нефтей принято проводить, исходя из данных, полученных при атмосферно-вакуумной разгонке дегазированных нефтей, отобранных из нефтяной скважины. Такая разбивка по групповому составу (а точнее по фракциям) определяет количественное соотношение в нефти отдельных групп углеводородов в соответствии со

стандартом нефтепереработки с целью получения товарных свойств «сырой нефти».

Такой метод не пригоден для получения исходных данных для моделирования реакций окисления и горения нефти, так как в каждом заданном интервале кипения могут оказаться соединения, близкие по молекулярной массе, но совершенно различные по характеру вышеуказанных реакций окисления.

Например, на рис. 2 [6] приведена кривая тепловыделения, полученная с помощью дифференциальной сканирующей калориметрии для чистых углеводородов различного молекулярного состава. Видно, что все они имеют сходную кинетику окисления. Наоборот, на рис. 3 [6] показаны аналогичные данные для двух углеводородов, которые ведут себя совершенно по-разному при окислении, но, скорее всего, попадут в одну фракцию при разделении по температуре кипения.

Следовательно, способ разделения жидкой фазы по составу, который используется для упрощения модели нефти, весьма важен для адекватного моделирования химических реакций.

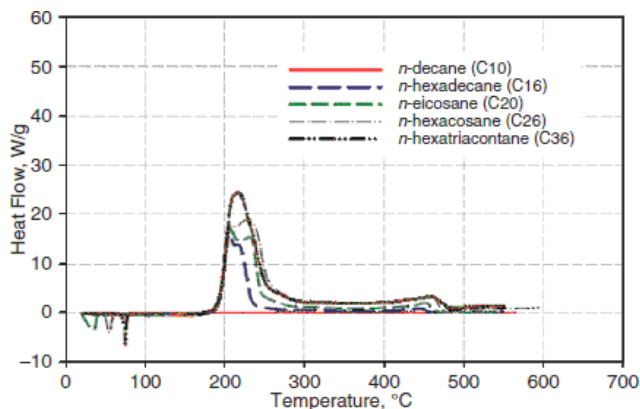


Рис. 2. Данные дифференциальной сканирующей калориметрии высокого давления для образцов разных парафинов при потоке воздуха в 10 см³/мин и давлении 2068 кПа [6]

Основная задача этих исследований – правильно выбрать критерии, по которым проводится разбивка нефти на фракции. С одной стороны, это должно дать возможность создания упрощенной математической модели нефти, с другой стороны, методы определения параметров должны быть апробированы и обеспечены техническими средствами, то есть должны обеспечивать доступность и воспроизводимость результатов.

В органической химии и химии нефти, как правило, прибегают к подразделению многообразия химических соединений (веществ) на отдельные группы, типы, классы, ряды и подгруппы, в основе чего лежит выявленная общность:

- по характеру связей между углеводородными атомами;
- по строению углеводородного скелета молекул;
- по сходным функциональным группам.

Наиболее часто различают «гомологические ряды» - это группы родственных органических соединений,

обладающих общими свойствами и отличающихся друг от друга на одну или несколько групп - СН в молекуле (физико-химические свойства гомологического ряда закономерно изменяются с увеличением молекулярной массы). Данная схема хорошо подтверждается для предельных и непредельных парафиновых углеводородов нефти. Однако для создания модели углеводородной компоненты породы, на которую будет произведено термическое воздействие, данное разделение не подходит, так как в составе нефтей баженской свиты содержится большое количество непредельных и ароматических углеводородов, смол и асфальтенов.

Из зарубежной практики хорошо известен метод разделения жидкой фазы нефти на SARA-фракции, то есть по растворимости содержащихся в нефти соединений в различных органических растворителях [8].

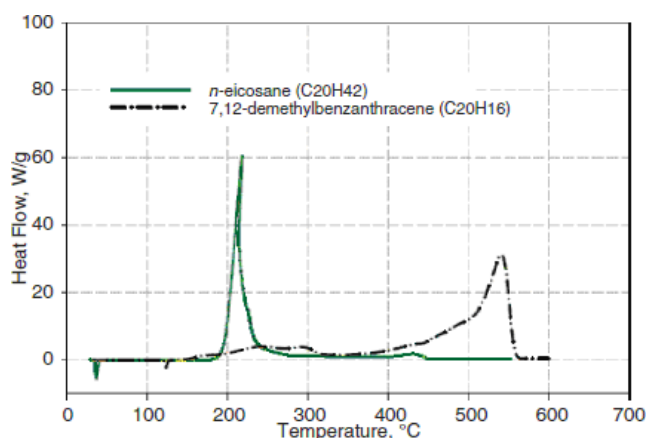


Рис. 3. Сравнение кривых тепловыделения для образцов углеводородов парафинового (сплошная кривая) и ароматического (штрихпунктирная кривая) ряда при давлении 4136 кПа в атмосфере воздуха [6]

SARA-анализ – это метод разделения, основанный на разделении дегазированной нефти на насыщенные углеводороды (S - Saturates), ароматические соединения (A - Aromatics), смолы (R - Resins) и асфальтены (A - Asphaltens) по их растворимости и полярности. Метод SARA-анализа широко распространен на Западе, является стандартизированным (разработан соответствующий стандарт США: ASTM D4124-09 – Standard test method for separation of asphalt into four fractions – Стандартный метод разделения нефтяного битума на четыре фракции), и используется в нефтепереработке для определения качества тяжелой битуминозной нефти с целью оценки возможности выпадения тяжелой нефти (остатков и битумов) в промышленном оборудовании и борьбы с образовавшимися отложениями, а также для оценки эксплуатационных свойств битумов при их переработке и старении. В SARA-методе (рис. 4 [6]) сначала отделяются асфальтены от других углеводородных компонентов путем разбавления нефти растворителем, в котором растворяются n-алканы. Затем оставшиеся компоненты, называемые мальтенами, разделяются

путем пропускания их смеси через хроматографическую колонку с адсорбентом.



Рис. 4. Блок-схема разделения сырой нефти SARA-методом

Каждый из компонентов выделяется путем его вымывания (элюирования) различными растворителями. Насыщенные углеводороды элюируются н-алканами (C_nH_{2n+2}). Молекулы ароматических соединений включают одно или несколько колец из шести атомов углерода и шести атомов водорода. Простейшим ароматическим соединением является бензол (C_6H_6). Эти углеводороды вымываются из мальтенов толуолом.

Смолы образуют класс веществ, отличаемых по характеристикам растворимости, и представляют собой нелетучий полярный компонент сырой нефти, который растворим в н-алканах, но не растворим в жидком пропане. Аналогично ведут себя асфальтены, которые не растворимы в н-алканах (таких как н-пентан или н-гептан), но растворимы в толуоле (рис. 4).

SARA-метод имеет ряд недостатков, в первую очередь, по воспроизводимости результатов. Несмотря на стандартизацию, результаты SARA-анализа могут существенно различаться при исследованиях в различных лабораториях, ввиду того, что данные о растворимости асфальтенов зависят от типа н-алкана, использованного для их осаждения (пропана или н-гектана). То есть для одной и той же нефти можно получить различные результаты SARA-анализа, в зависимости от осадителя.

Тем не менее, этот метод, при наличии соответствующих реагентов и адсорбентов и аналитической аппаратуры, широко применяется в США и Канаде для исследования реакций пиролиза и окисления нефтей при создании метода добычи нефти с закачкой в пласт воздуха [6, 8]. Реакции изучаются раздельно по каждой из выделенных фракций, а также для их композиций [6, 8].

Преимуществом этого разделения для целей моделирования химических реакций при ТГВ является то, что различные фракции, выделенные в сущности по растворимости, различаются и по положению пика тепловыделения. Это, в первую очередь, касается фракций насыщенных углеводородов и асфальтенов. В принципе, возможны и иные способы разделения, главное чтобы условие различного положения пика тепловыделения наблюдалось для разных фракций.

Для нашей страны недостатком этого метода является то, что он широко не применялся, т.к. отсутствует комплексная регламентация методики; аппаратура, сорбенты и растворители, применяемые за рубежом, у нас либо отсутствуют, либо дороги.

В России для исследования товарных свойств битумов в последнее время этот метод стандартизован для исследования товарных характеристик битумов - ГОСТ 32269-2013. «Битумы нефтяные». Стандарт является, по сути, копией американского стандарта ASTM D 4124-09 D. Характерно, что в ГОСТ 32269-2013 имеется ссылка: «так как точные показатели метода не были разработаны, то применять его только для исследовательских и информационных целей, а полученные результаты не могут быть использованы при установлении товарной цены на битум».

Поэтому использование этого вида разделения нефти на фракции при создании метода ТГВ на сегодняшний день представляет значительные трудности.

Кроме того, определение ароматических соединений в нефти фактически представляет интерес для оценки возможных химических реакций при термогазовом методе, но пока такие реакции мало интересовали нефтепереработчиков и поэтому реакции окисления и пиролиза ароматических соединений как самостоятельный отдельный вид реакций не выделены и не ведется их учет. Поэтому практически в химических реакциях, протекающих при ТГВ в присутствии кислорода и металлов, содержащихся в металлоорганических соединениях нефти, скорее всего, возможен только суммарный учет всех реакций смол и ароматических углеводородов как единой углеводородной фазы.

В то же время, применение именно SARA-метода разделения нефти на фракции вовсе не является обязательным. Для создания блока химических реакций для моделирования ТГВ важно разделение нефти на лёгкие, тяжёлые и промежуточные фракции методом, который практически освоен, доступен в отечественной промышленности

Учитывая, что по ОСТ [2] предусмотрено определение содержания асфальтенов, смол и тяжёлых парафиновых углеводородов более простым методом, по существу являющимся упрощённым аналогом SARA-анализа, достаточно лишь провести несложные и недорогие стандартные определения (рис.5).

Необходимо провести апробацию этой отечественной методики при исследовании нефти, содержащей и тяжёлые, и лёгкие соединения углеводородов, в сочетании с измерениями дифференциальной сканирующей калориметрией.

Моделирование газовой части пластовой углеводородной смеси на первый взгляд не представляет больших трудностей, так как получить состав соответствующего газа можно с помощью хроматографии. Однако необходимо учитывать, что при высоких пластовых температурах и давлениях, сопровождающих метод ТГВ, в составе газовой фазы будет содержаться большое количество пропановых и бутановых компонентов, углекислого газа и азота, что

способствует формированию режима смешивающегося вытеснения.

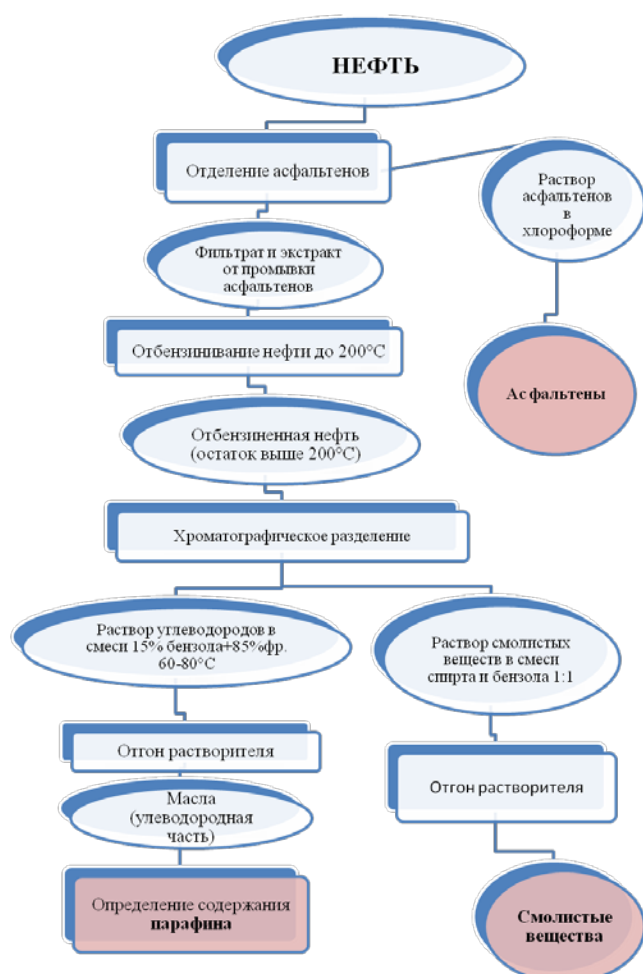


Рис. 5. Отечественная схема определения содержания смолисто-асфальтеновых веществ в нефтях

Выводы

1. Исследование природной структуры нефтенасыщенных пород баженовской свиты, получение данных для моделирования химических реакций, происходящих в содержащихся в породе углеводородах при закачке в пласт воздуха, требует развития и создания новых, специализированных, методик и аппаратуры исследований.
2. Изначально органическое вещество содержится в баженовской свите как в жидком, так и в твердом состоянии (в составе скелета породы). Поэтому исследование баженовской свиты требует создания новых методик исследования как

пластовых флюидов, так и породы. Причем исследования должны выполняться непосредственно на нефтенасыщенном образце, отобранном при бурении скважины специальным керноотборником, исключающим потери легких компонентов. Образцы должны храниться в герметичных контейнерах при низкой температуре. Для работы с такими образцами необходимы специальные установки и приборы, в том числе использующие неразрушающие методы исследования.

3. Природный нефтеносный объект – баженовская свита – обладает целым рядом неизученных свойств. По ряду этих свойств получить данные на типовой или стандартной аппаратуре не представляется возможным. Поэтому прямой перенос известных методик на исследование баженовской свиты практически не реализуем. Применение методов-аналогов при исследовании физико-химических, механических и гидравлических характеристик данного природного объекта, ввиду сложности и неоднозначности поведения объекта исследования, неправомерно. Дополнительное усложнение по описанию проходящих процессов накладывается при применении метода ТГВ.
4. При ТГВ происходит преобразование первоначального органического вещества. Необходимо изучать процессы преобразования этого вещества, а так же свойства и компонентный состав исходного органического вещества и продуктов реакций.
5. В качестве научной базы при изучении углеводородного вещества баженовской свиты и его изменений при реализации ТГВ необходимо шире привлекать теории из различных областей знаний. Необходимость такого более широкого подхода вызвана тем, что ТГВ – это не только метод добычи нефти. Его реализация влечет за собой переформирование объекта воздействия. В результате этого меняются свойства пород, а непосредственно в пласте образуется какое-то количество нефти, отличающейся по составу и свойствам от первоначальной. По этой причине при применении метода ТГВ и вопросы регулирования воздействия гораздо более важны, как для рациональной выработки запасов начальной нефти, так и для получения максимального количества искусственно формирующихся углеводородных компонентов.

Problems and Goals of Bazen Suit Hydrocarbons Study for Thermo-Gas Development Realization

K.D. Ashmyan, V.A. Yudin, A.V. Korolev, D.T. Mironov, I.V. Afanaskin, S.G. Volpin

Abstract: Main problems and goals of physical and chemical transformations of bazen suit hydrocarbons analysis for thermo-gas development (TGD) are examined. It is pointed out that such bazen suit hydrocarbons study have to be provided using non-standard methods. Analysis of such transformations in produced oil can be provided using fractioning of oil by Russian methodology, already created, tested and standardized.

Keywords: Enhanced oil recovery, thermal-gas influence, ekzo-thermal conversions, mass-transition, phase conversions, residual oil, low-temperature oxidation, high-temperature combustion, oil saturated formation structure.

Литература

1. В.Б.Бетелин, В.А.Юдин, И.В.Афанаскин и др. Создание отечественного термогидросимулятора – необходимый этап освоения нетрадиционных залежей углеводородов России. М.: ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2015. – 206 с.
2. ОСТ 153-39.2-048-2003 Нефть. Типовое исследование пластовых флюидов и сепарированных нефтей.
3. А.П.Алдушин, Т.П.Ивлева. Гидродинамическая неустойчивость спутной волны фильтрационного горения. Численное моделирование // ДАН. 2013, т. 451 №2. - С. 176-179.
4. Г.А.Калмыков. Материалы из Пояснительной записки к методике обработки ГИС, керна, испытаний, особенностей геологического строения и подсчета запасов (ресурсов) отложений баженовской свиты в пределах деятельности ОАО «Юганскнефтегаз». ОАО «НК «Роснефть». Договор №100013/0585Д от 09 января 2014 г. МГУ.
5. А.С.Ушакова. Построение модели реакции окисления нефти для внутрипластового горения по результатам исследований методом дифференциальной сканирующей калориметрии // Нефтяное хозяйство. №1. 2014.
6. D.Gutierrez, R.G.Moore, M.G.Ursenbach. The ABCs of In-Situ-Combustion Simulations: From Laboratory Experiments to Field Scale // SPE- 148754, 2012.
7. W.E.Brigham, L.Castanier. In-situ Combustion // Petroleum Engineering Handbook, 2007.
8. В.Б.Бетелин, В.А.Юдин, А.В.Королёв и др. Моделирование химических реакций окисления и горения углеводородов при добыче нефти с закачкой в пласт воздуха. М.: НИИСИ РАН, 2015. – 161 с.
9. Г.А.Калмыков, Н.С.Балушкина, В.С.Белонин и др. Пустотное пространство пород баженовской свиты и насыщающие его флюиды // Недропользование XXI век, 2015. №1.
10. Н.С.Балушкина, Г.А.Калмыков, В.С.Белохин и др. Кремнистые коллекторы баженовского горизонта Средне-Назымского месторождения и структура их пустотного пространства // Вестник Московского университета. Серия 4. Геология. 2014. Том 4. № 2. - С. 35-43.
11. Enhanced oil recovery (EOR) methods in Russia: time is of essence. Ernst and Young, 2013. [http://www.ey.com/Publication/vwLUAssets/EY_-Enhanced_oil_recovery_\(EOR\)_methods_in_Russia:_time_is_of_the_essence/\\$FILE/EY-Enhanced-Oil-Recovery.pdf](http://www.ey.com/Publication/vwLUAssets/EY_-Enhanced_oil_recovery_(EOR)_methods_in_Russia:_time_is_of_the_essence/$FILE/EY-Enhanced-Oil-Recovery.pdf).
12. Л.И.Богородская, А.Э.Конторович, А.И.Ларичев. Кероген: Методы изучения, геохимическая интерпретация. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал "Гео", 2005. - 254 с.
13. И.Л.Мархасин. Физико-химическая механика нефтяного пласта. М.: Недра, 1977.
14. Н.М.Эмануэль, Е.Т.Денисов, З.К.Майзус. Цепные реакции окисления углеводородов в жидкой фазе. М: Наука, 1965.
15. А.А.Боксерман. Результаты и перспективы применения тепловых методов воздействия на пласт // Тепловые методы воздействия на пласт. Материалы отраслевого семинара. 5-8 октября 1971 г., Ухта. М.: ВНИИОЭНГ, 1971. - С. 10-16.
16. Патент РФ 2139421. Способ разработки нефтяного месторождения. 09.09.1998 г.

Некоторые проблемы применения трассерного метода для гидродинамического моделирования

Р.М. Кац

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия

Аннотация: Рассмотрены некоторые аспекты количественной интерпретации данных трассерных исследований. Рассмотрены примеры подходов к такой интерпретации по ряду зарубежных публикаций.

Ключевые слова: трассерные исследования, гидродинамическое моделирование, гидродинамическая модель пласта.

Введение

История применения трассеров для исследования нефтяных месторождений насчитывает около 40 лет. К сожалению, значительная часть исследовательских работ в этой области плохо отражена в научно-технической литературе по ряду объективных причин. Информация по промысловым экспериментам часто представляет лишь локальный интерес; часть промысловых исследований не была успешной; некоторые исследования, хотя и опубликованы в печати, были фрагментами более обширных проектов, причем разделы, связанные с трассерами, не представляли большого интереса для авторов.

Многие статьи содержат детальную информацию о выборе трассеров, методике проведения трассерных исследований, определении концентрации трассеров в отбираемой воде. Количественной интерпретации получаемых данных уделено гораздо меньше внимания; в основном, в большинстве публикаций реализован только качественный подход. Проблемам использования трассеров для построения полноценной гидродинамической модели исследуемого объекта посвящена только незначительная часть исследований.

Первая серьезная монография [1], охватывающая как теоретические, так и практические аспекты трассерных исследований в нефтяной промышленности, появилась только в 1995 г. В данной монографии основное внимание уделяется лабораторным и промысловым аспектам проблемы, хотя в ней представлены и результаты компьютерного моделирования процессов движения трассеров в природных пластах. Автор монографии [1] справедливо отмечает, что образовался существенный разрыв между теоретиками и практиками.

Этот разрыв присущ и отечественному опыту трассерных исследований [2-8], также характеризующихся, в основном, качественными подходами. Теоретические результаты, опубликованные, например, в монографии [9] и статье [10], мало используются.

В последнее время, наряду с прогрессом в области технических средств, можно констатировать определенное развитие методов интерпретации результатов применения трассерных исследований,

связанное с успехами математического моделирования течения в неоднородных средах.

Простейшие математические методы интерпретации результатов индикаторных исследований описаны в хорошо известных работах [4, 12, 13]. Они позволяют перейти от чисто качественной интерпретации данных трассерного метода к определению числовых значений параметров используемой гидродинамической модели объекта. В качестве таковой чаще всего используются сравнительно простые модели, например, слоистые модели с изолированными слоями, в которых определению подлежит функция распределения проницаемости по слоям.

В одной из наиболее полных работ - диссертации [4] - используется слоистая модель, в которой течение в каждом пропластке предполагается одномерным («галерея-галерея»), течение считается двухфазным. Модель не позволяет учесть искривление линий тока, непостоянство скорости фильтрации в пласте, существование зон с очень малыми скоростями фильтрации, то есть те эффекты, которые присущи только двумерным и трехмерным течениям, и которые оказывают влияние на динамику наблюдаемой концентрации трассера в скважине. Влияние многомерности решения обратной задачи в работе [4] учитывается приближенно, через коэффициент дисперсии. Для решения обратной задачи применяется итерационная процедура, требующая многократного решения уравнений фильтрации численными методами, то есть весьма неэкономичная с точки зрения вычислительных затрат. Сходный подход применен и в работах [6, 7, 28].

В статье [11] рассмотрена слоистая модель с двумерными изолированными слоями. Течение в каждом слое предполагается однофазным, при переносе примеси учитывается продольная дисперсия. Метод расчета переноса индикатора потоком основан на аналитическом решении уравнения конвективной диффузии для одномерного течения в трубке тока. Обратная задача в работе [11] решается с помощью методов поиска экстремумов нелинейного функционала. Следует отметить, что при такой постановке обратной задачи отсутствует ответ на вопрос о единственности решения и его чувствительности к погрешности исходных данных.

В работах Вирновского Г.А. [14, 15] рассмотрена обратная задача для слоистого пласта в случае двухфазного течения (модель Баклея-Леверетта). Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого или второго рода с автомодельным ядром. Такой подход достаточно универсален, единственность решения задачи может быть исследована, он экономичен с точки зрения вычислительных затрат, поскольку достаточно лишь однократного расчета течения в одном слое (пропластке). Обобщение этого подхода на случай переноса нейтральной примеси фильтрационным потоком принципиальных трудностей не вызывает, однако до настоящего времени это сделано не было.

Большое значение имеет задача идентификации непроницаемых экранов или высокопроводящих трещин по данным трассерных исследований в комплексе с результатами гидродинамических исследований. Приемлемого решения этой, более сложной, задачи до сих пор не получено. Известно только решение задачи выявления непроницаемого барьера путём воспроизведения истории разработки для гипотетического участка пласта [16]. По нашему мнению, если для решения этой задачи использовать только какой-то один из известных методов исследования, в том числе, трассерный метод, то решение может оказаться неоднозначным, необходимо комплексирование различных методов.

Следует отметить также еще одну важную проблему. После запуска трассера в нагнетательную скважину первые порции трассера очень быстро обнаруживаются в добывающих скважинах, находящихся на значительном удалении от нагнетательной скважины, хотя обычно - с незначительной концентрацией трассера в продукции. В некоторых промысловых экспериментах отмечается приход первых порций трассера в добывающие скважины уже через несколько часов. Как правило, это объясняют природной или техногенной трещиноватостью пласта в межскважинном пространстве.

В основном, длительность трассерных исследований варьируется от нескольких месяцев до года. Поэтому возникает вопрос, возможно ли за такое короткое время получить какие-то количественные результаты, имеющие отношение к геологическому строению пласта или к его фильтрационно-емкостным характеристикам. Ответа на него до сих пор не получено.

Всё это показывает, что при построении гидродинамической модели объекта применение трассерного метода не является панацеей; необходимо комплексирование различных методов исследования продуктивных пластов.

1. Примеры количественной оценки результатов трассерных исследований

Рассмотрим несколько примеров количественной оценки результатов трассерных исследований зарубежными специалистами.

Эти подходы включают следующие элементы:

- ✓ использование данных трассерных исследований в комбинации с другими видами исследованиями, каждое из которых в отдельности не дает возможности описать объект с надлежащей полнотой;

- ✓ использование концептуальных физико-математических моделей для определения пространственного распределения концентрации трассеров и описания неоднородности пластов;

- ✓ использование компьютерных симуляторов для согласования трассерных данных и геологической модели пласта;

- ✓ использование данных о динамике концентрации трассера в скважинах для определения текущей водонасыщенности пласта и коэффициента охвата.

1. Северо-западный блок месторождений Prudhoe Bay (Аляска, США) [20].

Блок ограничен нарушениями, система заводнения представляет собой 18 обращенных девятиточечных элементов площадью около 32 га каждый. В каждую нагнетательную скважину был закачан один из четырех радиоактивных трассеров: Со-57, Со-60, С-14 и тритий. Ниже приводится информация по одному из девятиточечных элементов, в котором использовался тритиевый индикатор. Детальный анализ движения воды в данном элементе показал, что вода в нем перемещалась совсем не так, как ожидалось. Ранние прорывы трассера в окружающие добывающие скважины свидетельствуют о том, что значительная часть нагнетаемой воды двигалась через зону с незначительным поровым объемом - «thief zone». Поток воды был очень сильно стратифицирован на большом удалении от нагнетательной скважины, смотри рис. 1.

Вода проникла в «thief zone» толщиной 3 м через нагнетательную скважину R-7 и появилась в окружающих скважинах практически на одной и той же вертикальной глубине. Расстояния от нагнетательной скважины до добывающих скважин варьируют от 720 м до 2000 м. Несмотря на то, что площадь фильтрации пересекается многочисленными нарушениями, их влияние на перемещение воды практически отсутствует. Однако отмечается существенное течение воды вдоль нарушений. На рис. 2, показаны добывающие скважины элемента с нагнетательной скважиной R-7.

Предварительное математическое моделирование, базирующееся на большом числе исследований керна, показало более существенное влияние анизотропии, чем оказалось на самом деле. Предполагалось, что гравитационные силы вызовут значительные перетоки воды вниз по вертикали и окажут положительное влияние на коэффициент охвата. Однако трассерные исследования не подтвердили результаты моделирования. Оказалось, что коэффициент анизотропии проницаемости, полученный по 2-х дюймовому керну, оказался на два порядка меньше, чем в межскважинном пространстве.

В данном случае трассерные исследования показали, что заводнение на рассмотренном участке недостаточно эффективно.

Идентификация геолого-физических параметров пласта с помощью трассерных исследований базировалась на модели горизонтального двумерного течения. Строгое северо-западное направление течения, обнаруженное в процессе трассерных

исследований, ассоциировалось с системой проводящих трещин, ориентированных в этом направлении. Эффект вертикально ориентированных неоднородностей был менее очевиден. Для изучения этого эффекта трассерные исследования комплексировались с изучением профилей продуктивности скважин.

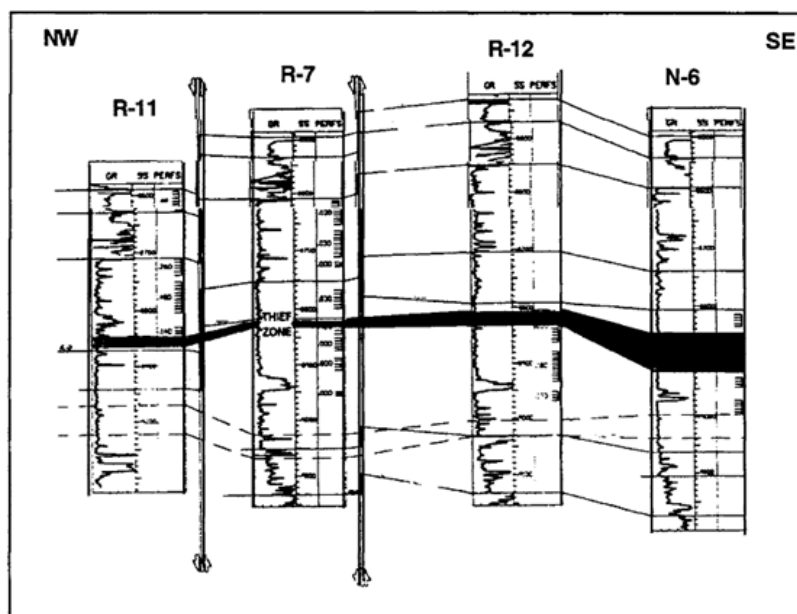


Рис. 1. Движение меченой воды в слоистом пласте [20]

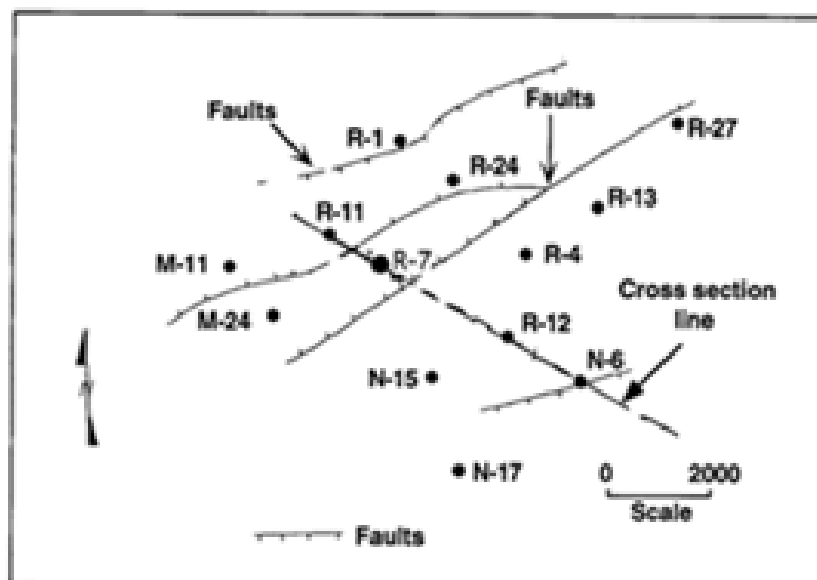


Рис. 2. Расстановка скважин на карте участка с нарушениями [20]

2. Месторождение Ekofisk (Северное море) [21]

Время движения трассера от нагнетательной скважины к добывающей обычно пропорционально расстоянию между скважинами и обратно пропорционально гидропроводности пласта в соответствующем направлении. Оно зависит и от присутствия барьеров и трещин, а также от механизма

фильтрации. Для анализа этих факторов были проведены по два различных трассерных исследования на двух различных месторождениях Северного моря. В обоих случаях трассеры закачивались на ранней стадии заводнения, а также спустя определенное время после начала заводнения.

На месторождении *Ekofisk* было предпринято исследование времени запаздывания появления

основного количества трассера в добывающей скважине и его связи с небольшим количеством воды и трассера, добываемых на скважине в период ранней стадии заводнения. Использовались два вида трассеров на опытном участке с четырьмя скважинами [21]. Пилотный участок разрабатывался одной центральной нагнетательной скважиной В-16 и тремя добывающими скважинами В-19, В-22 и В-24, среднее расстояние до нагнетательной скважины – 375 м., глубина – 3000 м. Тритиевая вода нагнеталась непрерывно в ступенчатом режиме с самого начала заводнения. Всего было закачено около 2 млн.м³ воды, меченной тритием, со средней концентрацией 2235 Bq/L (беккерель на литр) в течение 34 месяцев. Добыча воды за это время составила около 88300 м³. И трассер, и вода в продукции скважин появились с неожиданным опозданием, причем показатели по скважинам отличались. Наибольшее количество трассера и наименьшее время появления трассера в продукции было отмечено в скважине В-22, наименьшее количество трассера и наиболее позднее время появления трассера в продукции были зафиксированы в скважине В-24. Эти различия объяснили эксплуатационными проблемами на скважинах.

Аналогичную информацию можно получить при пульсирующем режиме закачки трассера, однако в данном случае процедура закачки оказывается проще, а чувствительность измерений – соответственно выше. Данная работа – одна из немногих, где было установлено соответствие между долей закачанной воды в продукции скважины и концентрацией трассера в добываемой воде.

Закачка йодидного трассера (I-125) производилась в импульсном режиме спустя 13 месяцев после начала нагнетания тритиевой воды, время прорыва йодида было намного меньше времени прорыва трития при относительно большей концентрации. Короткий период полураспада I-125 (60 суток) ограничил период исследования до одного года. Закачка останавливалась в июле-декабре 1987 года на период ремонта и пуска в работу трех добывающих скважин. Соответствующие графики радиоактивности воды и обводненности на скважинах в зависимости от времени приведены на рис. 3.

Результаты исследований показали, что первоначально закачанная тритиевая вода частично за счет противоточной капиллярной пропитки была поглощена пластом, поэтому она появилась в добывающих скважинах с некоторым опозданием. Закачанная вслед йодидная вода продвигалась по пласту в соответствии с законами конвективного переноса и молекулярной диффузии.

3. Месторождение Gulfaks (Северное море) [22]

В качестве трассера закачивалась тритиевая вода в процессе заводнения Fault Block 3G на месторождении Gulfaks в Северном море [22]. Блок, ограниченный нарушениями, разрабатывался двумя добывающими скважинами А-1Н и А-2Н и одной нагнетательной скважиной А-5Н, как показано на рис. 4.

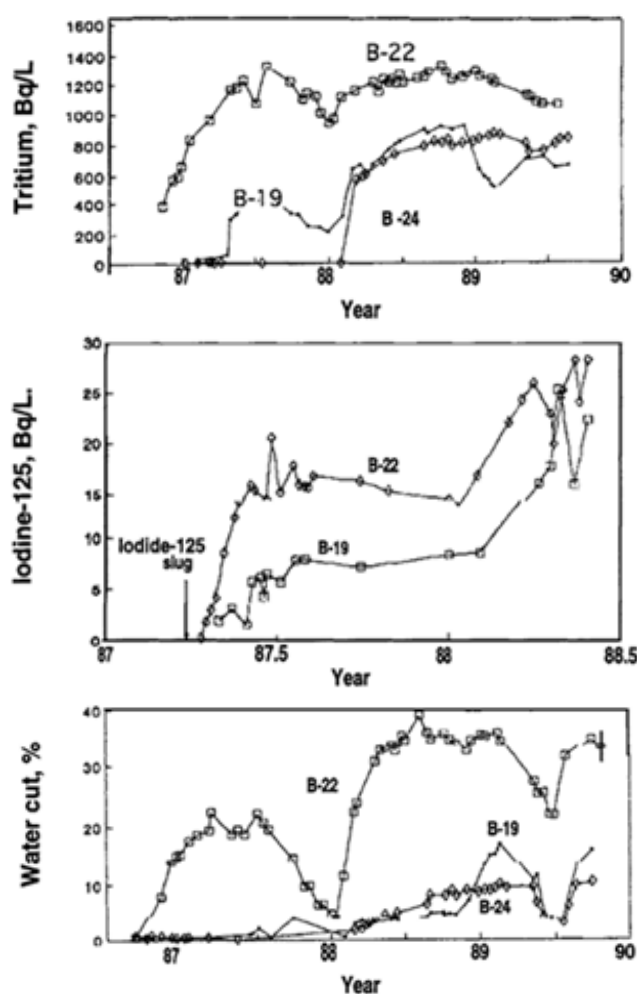


Рис. 3 Обводненность продукции и концентрация трассеров по добывающим скважинам [21]

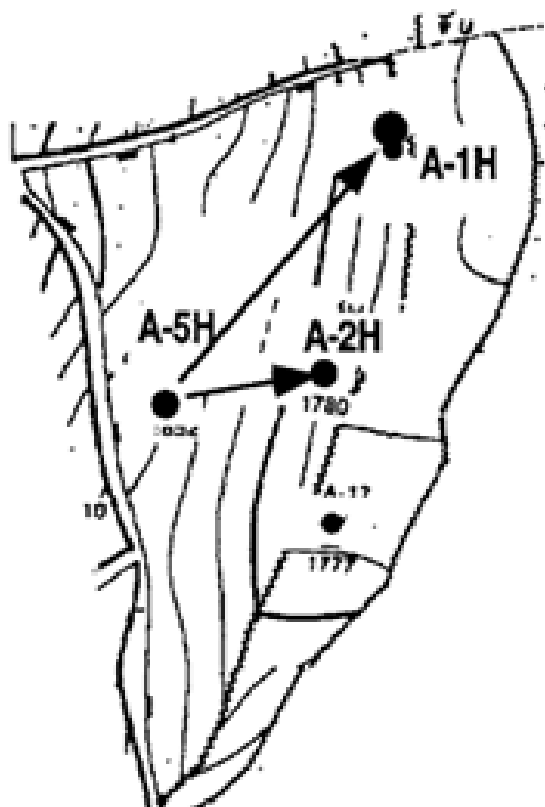


Рис. 4. Карта блока 3G [22]

Так же, как и на блоке месторождения Ekofisk, описанном выше, в импульсном режиме в нагнетательную скважину А-5Н были закачаны два трассера. Первый импульс закачки (третиевая вода активности 400 кюри) длился 10 дней после начала заводнения. Через 16 месяцев после закачки на скважине А-1Н не появились ни вода, ни трассер. На скважине А-2Н отмечался незначительный отклик. Второй импульс закачки тритиевой воды 135 кюри был также осуществлен через скважину А-5Н. Вскоре после этого импульса наблюдался существенный рост отклика в виде второго пика на скважине А-2Н и второе повышение обводненности. То же самое произошло на скважине А-1Н, как показано на рис. 5. Черными кругами и сплошными линиями обозначены трассерные данные, черными окружностями обозначена обводненность, стрелками обозначено время начала импульсов.

Воспроизведение кривых «концентрация-время» показало, что разница в откликах на первый и второй импульс на скважинах А-1Н и А-2Н может быть объяснена естественной причиной – капиллярной пропиткой, аналогично обнаруженной на месторождении Ekofisk. Авторы сделали вывод, что низкопроницаемые породы проявляют себя как горизонтальные барьеры, то есть капиллярные силы препятствуют проявлению гравитационных эффектов.

Для оценки качества различных моделей течения использованы конечно-разностные симуляторы. Результаты моделирования показаны пунктирными линиями на рис. 5.

Лучшая адаптация модели была получена для трехслойного пласта. Модель включала один низкопроницаемый слой, обеспечивающий капиллярную пропитку, и слой с пониженной анизотропией проницаемости.

4. Месторождение Ranger (США) [23]

В данном исследовании использовано два разных подхода для получения более качественного описания пласта. В первом подходе используется модель трубок тока, что позволяет определить толщины и проницаемости слоёв. Во втором подходе используется композиционный симулятор с привлечением других промысловых данных, что дает возможность оценить как проницаемости и толщины слоев, так и насыщенности жидкостью.

Месторождение Ranger разрабатывается с применением заводнения, продуктивный пласт представлен песчаником McCleskey, рис. 6 [23]. Глубина пласта около 1020 м, эффективная толщина 2-7,5 м. Средняя пористость – 14,7 %, проницаемость по воздуху – 200-1500 мД. Плотность сетки скважин – 16 га/скв. На опытном участке, содержащем пять скважин, использовались пять различных трассеров. Два трассера – тритиевая вода и ион тиоцианата – были одновременно закачаны в скважину 3-38 для их оценки в качестве водных трассеров. Кобальт-57, кобальт-60 и кобальт-58 были закачаны в скважины 3-41, 3-42 и 3-45 соответственно. Кроме того использовались: изопропиловый спирт (IPA) и

третичный бутиловый спирт (ТВА), которые закачивались в скважину 3-38 для мониторинга остаточной нефтенасыщенности.

Тритиевая вода с радиоактивностью 10 кюри и 2260 кг тиоцианата были закачаны в скважину 3-38 и отслежены в добывающих скважинах 3-37, 3-39 и 3-40. Кривые «концентрация-время» были нормализованы на общее количество или начальную радиоактивность нагнетаемой воды. Эти результаты приведены на рис. 7. Трассерные данные даны в микропроцентах на литр ($\mu\text{g/L}$) в зависимости от накопленного объема закачанной воды.

Для одной из скважин (3-39) кривые для тритиевой воды и тиоцианата были примерно одинаковы. Для других двух скважин пик концентрации тиоцианата был вдвое выше пика тритиевой воды. На этом основании авторы работы [23] сделали вывод о предпочтительности тиоцианата в качестве трассера.

Для опытного участка была создана модель трубок тока, которая базировалась на объемах добычи и нагнетания, а также известных пластовых параметрах. Неоднородность пласта моделировалась пропластками различных проницаемостей и толщин. Перемешивание трассера описывалось аналитическим решением для трубки тока с продольной дисперсией [24]. Затем модель настраивалась по зарегистрированным кривым «концентрация-время» для трития. Подбиралось количество пропластков, достаточное для того, чтобы воспроизвести промысловые данные с приемлемой точностью.

Модель не описывала реальное строение пласта, но была «честной» аппроксимацией полученных результатов. Окончательное распределение линий тока, представленное на рис. 8, показывает, что значительная доля нагнетаемой воды уходит за пределы участка и не попадает в исследуемые скважины, что и объясняет низкий коэффициент извлечения трассера. В модели предполагалось постоянное дебита скважин и флюидонасыщенности пласта, что не реализуется в действительности. Такие модели, однако, позволяют получить полезные данные для регулирования разработки.

Данные, полученные на месторождении Ranger [23], были использованы в композитном симуляторе, описанном в работах [24, 25]. Данные ГИС, керна, добычи были введены в симулятор, затем пластовые параметры были изменены таким образом, чтобы воспроизвести кривые «концентрация-время», зарегистрированные на скважинах.

Первоначальная зона исследований показана на рис. 9. Она включает 4 добывающих и 13 нагнетательных скважин, расположенных на участке площадью 60 га. Нагнеталось 7 различных трассеров. Финальная стадия моделирования охватывала участок с 17 скважинами площадью 96 га.

Размеры сеточных блоков составляли 30 м по каждому направлению. С помощью специальных процедур тестировалась чувствительность модели с целью минимизации численной дисперсии.

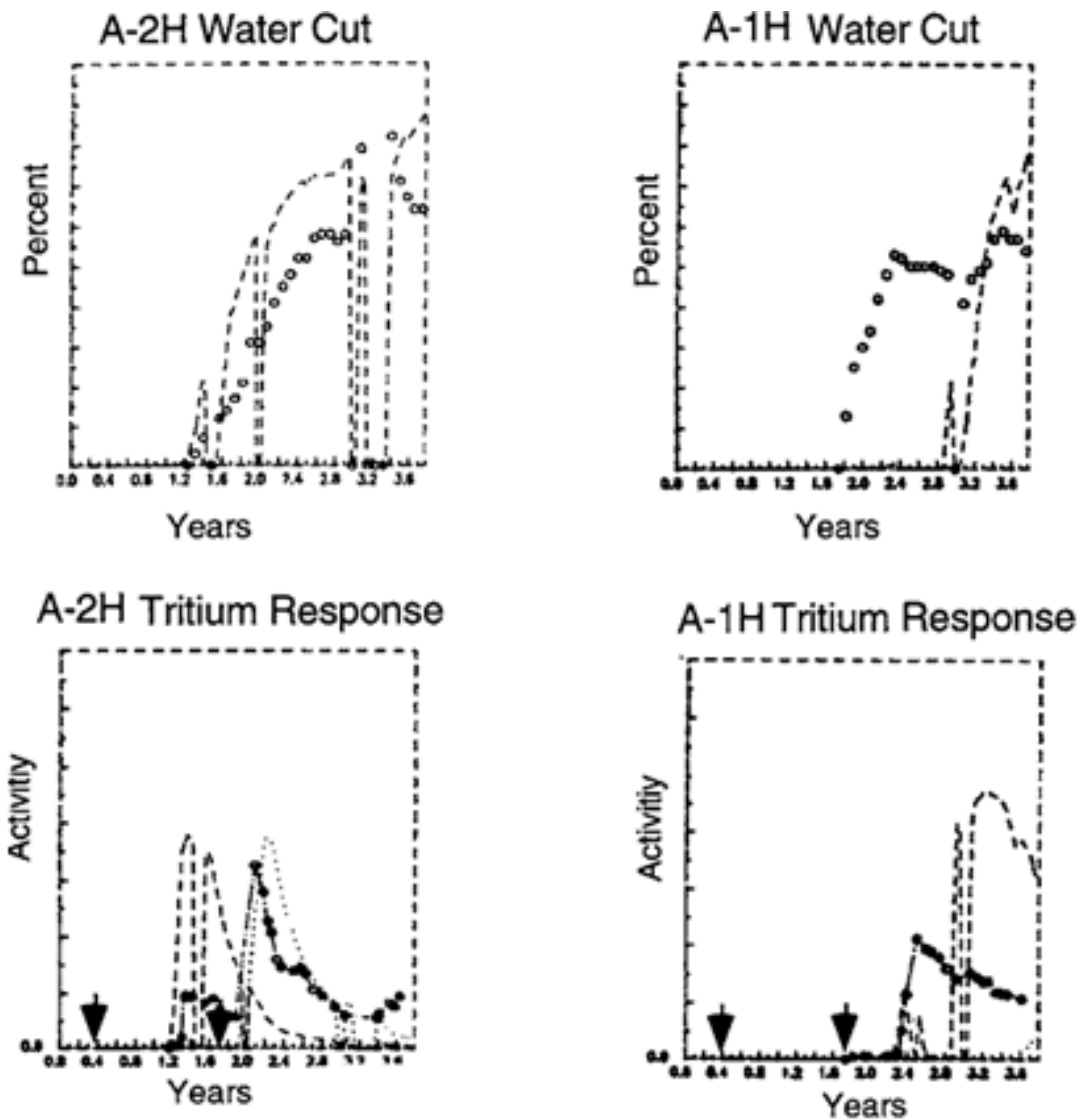


Рис. 5. Обводненность продукции и концентрация трассера [22]

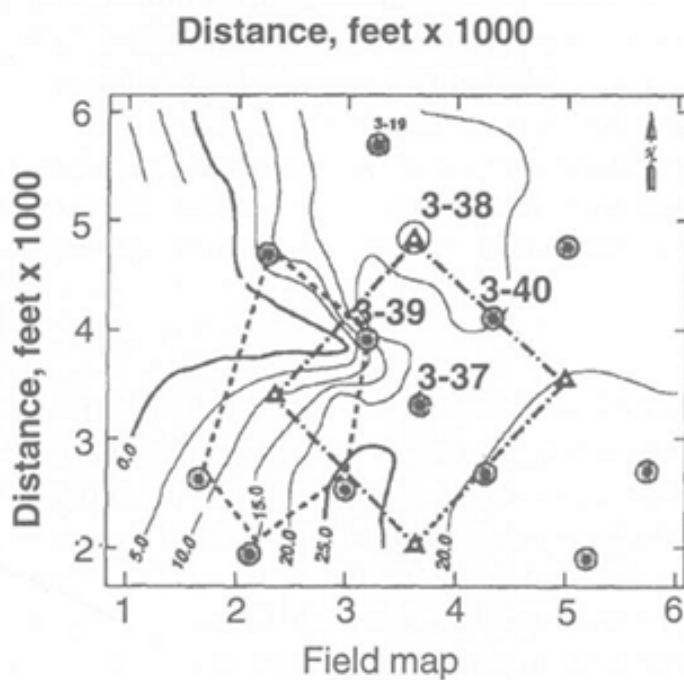


Рис. 6. Карта пилотного участка McCleskey [23]

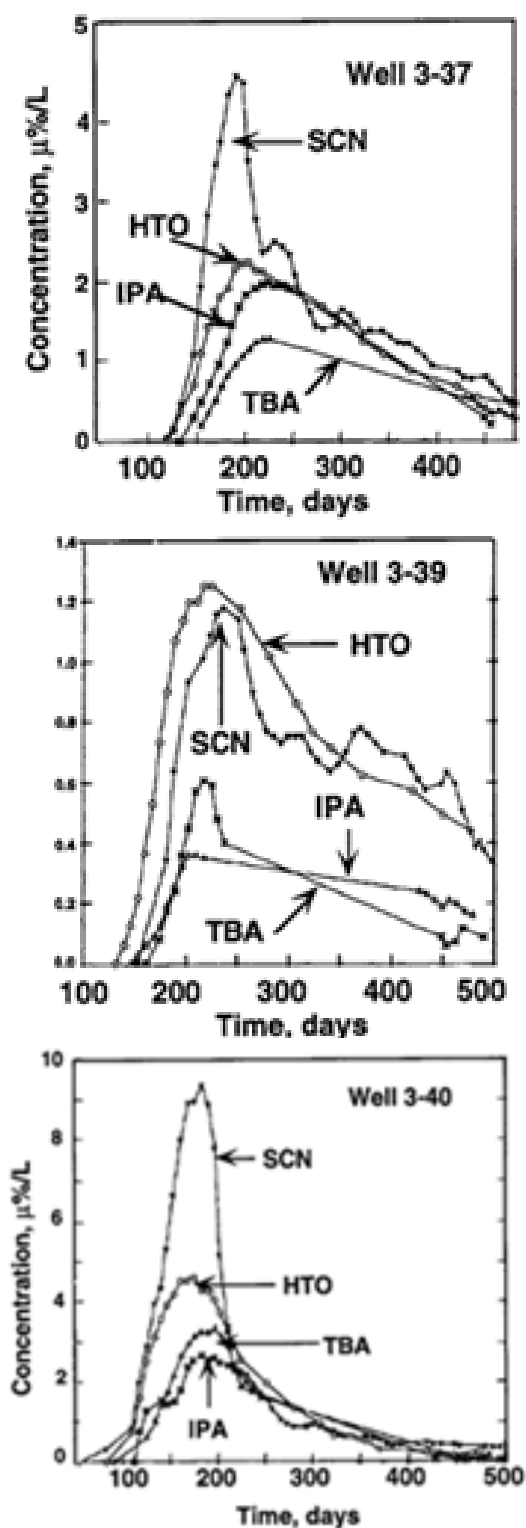


Рис. 7. Кривые «концентрация – время», месторождение Ranger [23]. HTO – тритиевая вода, SCN – тиоцианат, IPA – изопропиловый спирт, TBA – третичный бутиловый спирт.

По многим аспектам эти процедуры отличались от тех, что применялись при моделировании в модели трубок тока. Отличия включают учет поперечной диффузии, зависящих от времени параметров, переменной подвижности нефти, вариации вертикальной и зональной проницаемостей. Модельные и промысловые кривые «концентрация-время» сравнивались на скважинах 3-37, 3-39 и 3-40 (рис. 9).

Для того чтобы воспроизвести трассерные данные на различных скважинах необходимо было существенно изменить зональную и вертикальную проницаемость. Участок был представлен тремя слоями с подгонкой проницаемости каждого слоя. Зональные неоднородности вводились для того, чтобы адаптировать время прорыва по скважинам. Расчетная кривая «концентрация-время» была очень чувствительна к небольшим вариациям поперечной дисперсии. Никакой существенной разницы между тритиевой водой и тиоцианатом не было обнаружено, в отличие от нормализованного отклика, полученного при изучении истории скважин.

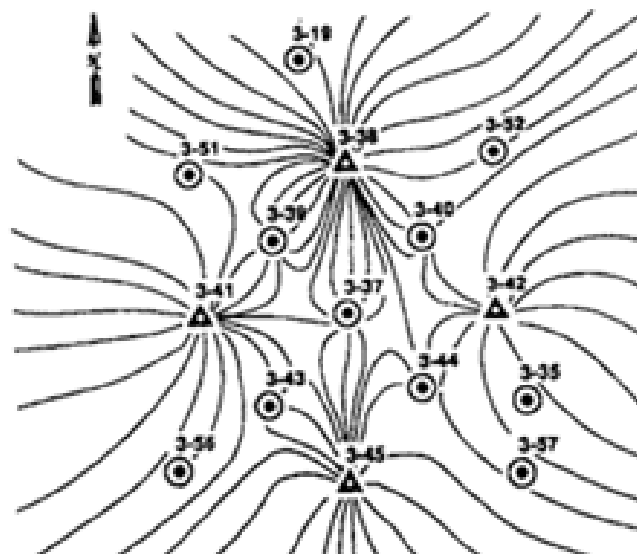


Рис. 8. Модель трубок тока [23]

5. Трассеры на месторождении Niitsu (Япония) [25]

Использование больших симуляторов для трассерных исследований требует больших расходов машинного времени. Аналитическая модель Abbaszadeh [25] для течения по трубкам тока намного дешевле и быстрее, но уступает в точности большой модели. Комбинируя обе модели можно получить полезные результаты, которых нельзя добиться, используя каждую модель в отдельности. При трассерных исследованиях пилотного участка нефтяного месторождения в Японии [27] модель трубок тока была использована для предварительного анализа трассерных откликов. Затем, для более детального анализа, использовался модифицированный 3D симулятор типа black oil. В результате авторы получили зональную и вертикальную неоднородность на пилотном участке. Модель также использовалась для определения коэффициента охвата, как функции времени.

Четыре трассера – йодид, нитрат, хлорид и тиоцианат тестировались на предмет потерь за счет статической адсорбции породой для случаев, когда несущей жидкой фазой были дистиллированная вода, искусственно составленная модель пластовой воды и две разновидности реальной пластовой воды. Все трассеры, кроме иона тиоцианата в двух пластовых водах, успешно прошли тестирование.

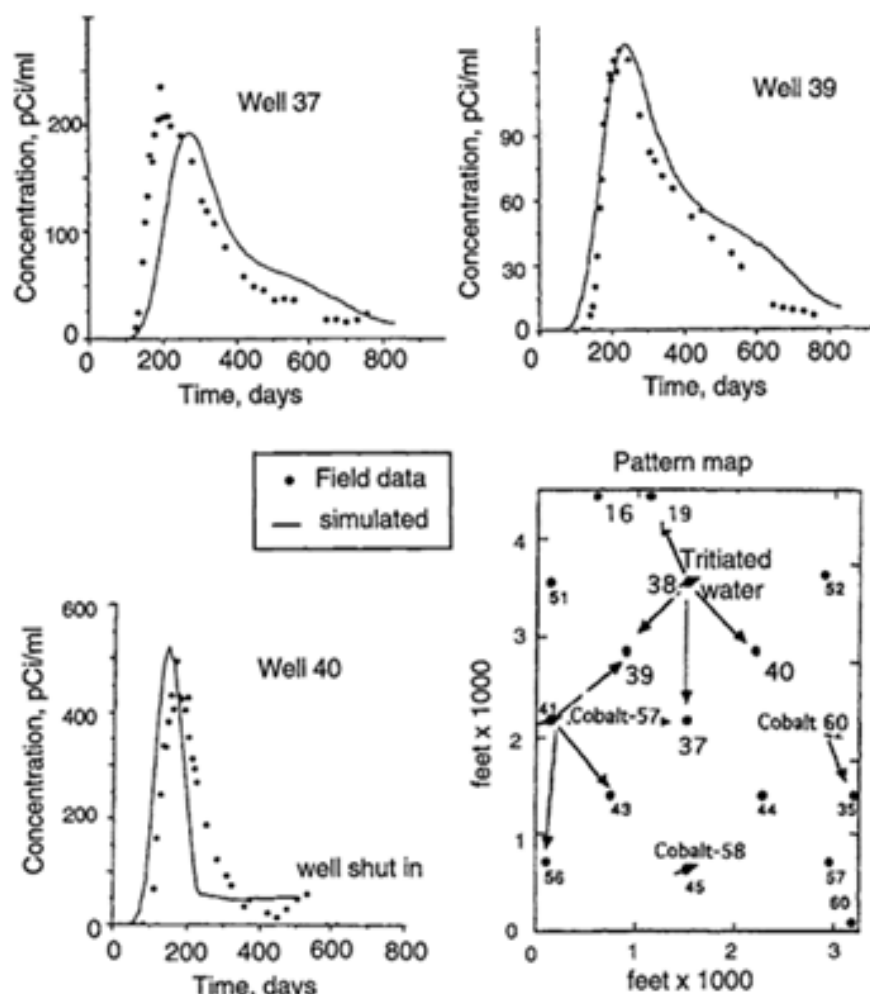


Рис. 9. Модельные и промысловые кривые «концентрация-время» [23]

Трассерное тестирование было частью большого исследования с прицелом на повышение нефтеотдачи. Пилотный участок разрабатывался новой нагнетательной скважиной R-2 и тремя существующими добывающими скважинами C-39, C-40 и C-85, которые находились на расстоянии около 30 м от нагнетательной скважины, как показано на рис. 10.

Первоначально трассерные данные анализировались с помощью модели, описанной в работах [26, 27]. Кривая «концентрация-время» при ступенчатой закачке преобразовывалась дифференцированием по закачанному объему. Данные по тиоцианату воспроизводили подбором толщин и проницаемости пропластков. Воспроизведения удалось достигнуть для четырехслойной системы для скважин C-39 и C-85 (рис. 11).

Из-за ошибок, возникших при дифференцировании, а также из-за дефицита данных по дисперсии, абсолютные значения толщин и проницаемости не были получены. Удалось получить только относительные величины. Численные результаты (рис. 11) были проинтегрированы с целью получения объемных характеристик и, как показано на рис. 12, воспроизведена относительная концентрация трассера на скважине C-39 как функция закачанного объема воды.

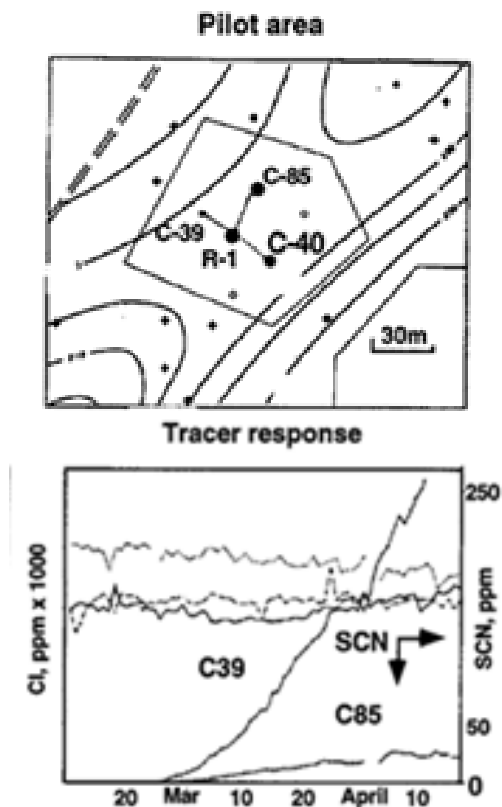


Рис. 10. Пилотный участок Niitsu и трассерные данные

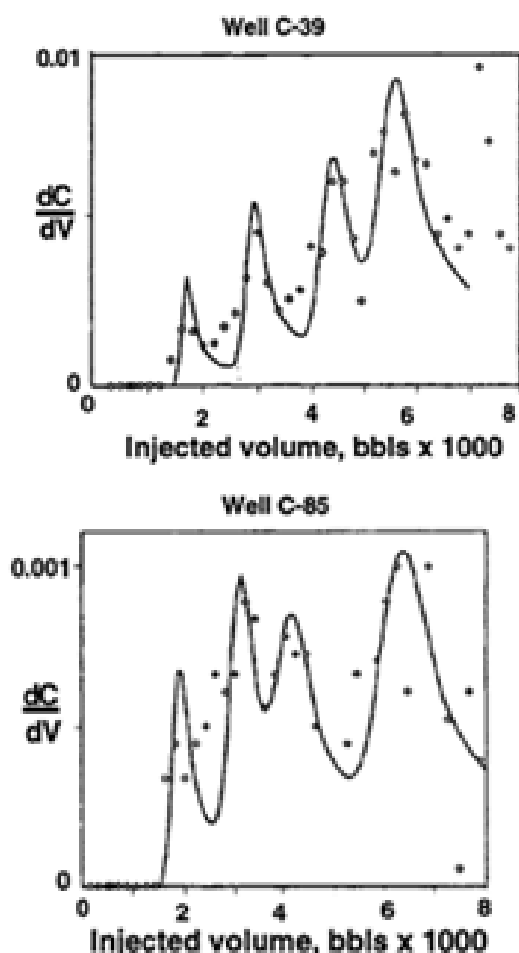


Рис. 11. Трассерные данные для четырехслойного пласта по скважинам C-39 и C-85 [26, 27]

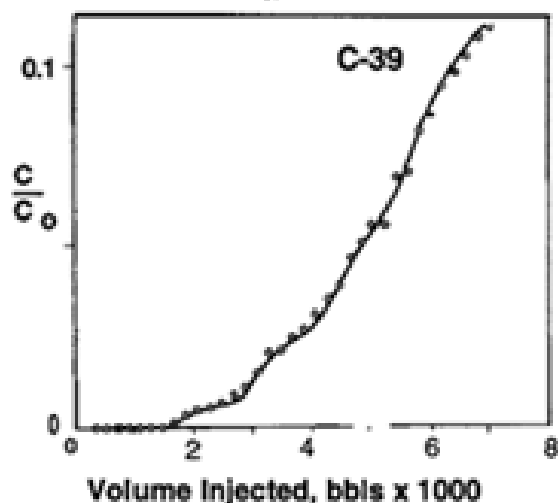


Рис. 12. Фактическая и воспроизведенная на модели относительная концентрация трассера на скважине C-39 [26, 27]

Далее промысловые данные были проанализированы с помощью симулятора типа black oil, имеющего полимерную опцию, с помощью которой моделировался трассер. Несколько моделей течения были протестированы с использованием данных по керну из четырех исследованных скважин. Наилучшее воспроизведение получено на модели,

содержащей вертикальную «thief zone» в пропластке 2, с радиальным распределением проницаемости в остальных трех пропластках. Эффект от естественного водонапорного режима также был учтен в модели, что обеспечило хорошее воспроизведение концентрации трассера во времени для двух скважин – C-85 и C-39.

Одной из главных целей исследования была оценка охвата заводнением. Это изучение позволило оценить как вертикальный, так и горизонтальный охват как функции времени.

2. Комплексование трассерного метода с другими видами гидродинамических исследований

Зарубежный опыт показывает, что построение адресной трехмерной гидродинамической модели пласта по данным только трассерного метода – практически невозможно.

Решение этой задачи можно получить только с помощью комплексования различных методов исследования: гидродинамические исследования, закачка трассеров, воспроизведение истории разработки и т.д. Примеры такого комплексного подхода в зарубежной литературе есть.

В статье [17] предлагается технология построения реалистичной с геологической точки зрения модели пласта с разномасштабной неоднородностью: трещиновато-пористой среды с дискретной (детерминированной) системой трещин. Эта модель строится с учетом сейсмички, скважинной информации и по данным обнажений. Затем эта модель уточняется по данным ГДИ, интерференции скважин и профилей приемистости и продуктивности скважин, производится апскейлинг модели, что делает возможным ее применение для реальных расчетов. Данная модель позволяет в частности предсказывать ранние прорывы воды. Предложенная в [17] технология конструирования геологической модели позволила авторам работ [17, 19] создать трехмерную гидродинамическую модель однофазной фильтрации для исследования движения трассеров в трещиновато-пористой среде 3D DFN (Discrete Fracture Network), смотри рис. 13.

Данная гидродинамическая модель позволяет получить дополнительную количественную информацию при проведении трассерных исследований, которая затем интегрируется с информацией, полученной с помощью гидродинамических исследований пластов и скважин. Так, например, с помощью ГДИ выявляется анизотропия фильтрационных характеристик пласта, а по результатам трассерных исследований выявляются основные фильтрационные каналы, обеспечивающие эту анизотропию. Предложенная в [18, 19] модель тестировалась на известных аналитических решениях. В [19] приводится пример моделирования трассерных исследований участка пласта, разрабатываемого четырьмя добывающими и одной нагнетательной вертикальными скважинами.

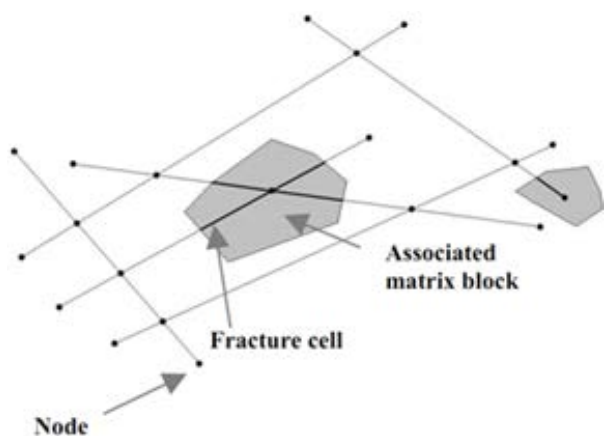


Рис. 13. Горизонтальная дискретизация матрицы и трещин в пласте [17]

Выводы

1. В целом, трассерные исследования безусловно являются весьма ценным источником информации для промыслового геолога, но, в основном, на качественном уровне. Методы количественной интерпретации пока разработаны только для корректировки эффективных моделей объекта - типа набора трубок тока или изолированных слоёв, позволяющих получать интегральные оценки параметров разработки всего объекта (участка) в целом. При этом требуется значительный объём численных модельных расчётов.

2. Методика корректного решения обратных задач трассерного метода, их алгоритмизированного использования при построении адресных трёхмерных гидродинамических моделей пока не разработана. Выше приведено несколько примеров использования трассерного метода для идентификации параметров пласта.

3. Данные трассерного метода могут быть использованы для идентификации гидродинамической модели пласта только при комплексировании со всей имеющейся геолого-геофизической и гидродинамической информацией об объекте.

4. Методика применения трассерного метода для построения адресных трёхмерных гидродинамических моделей требует специальной теоретической исследовательской работы, с большим объёмом модельных расчётов. Для этого необходимы достаточно сложные алгоритмы создания расчётных сеток адаптивного типа, со сложными геометриями, предусматривающими сгущения сеток в районе расположения «узких» фильтрационных неоднородностей.

5. В методическом плане можно рекомендовать принять за основу подход, предложенный в работах [17-19].

Статья подготовлена к печати В.А.Юдиным, А.В.Королёвым. и И.В.Афанаскиным после кончины автора.

Some aspects of tracer tests data application in reservoir simulation

R.M. Katz

Annotation: Some aspects of tracer tests data qualitative interpretation are examined. Review of approaches to resolve this problem is presented based on a number of western scientific publications.

Keywords: Tracer tests, reservoir simulation, reservoir hydrodynamic model.

Литература

1. B.Zemel. Tracers in the oil field. Elsevier Science, 1995. P. 487.
2. Э.В.Соколовский. Применение радиоактивных изотопов для контроля за разработкой нефтяных месторождений. М.: Недра, 1958. – 176 с.
3. Э.В.Соколовский, Г.Б.Соловьев, Ю.Л.Тренчиков. Трассерные методы изучения нефтегазовых пластов. М.: Недра, 1986. 157с.
4. М.С.Хозяинов. Диссертация на соискание степени доктора технических наук. М. 1987.
5. В.И.Зайцев, Э.В.Соколовский, С.А.Султанов и др. Применение тритиевого индикатора для контроля за разработкой нефтяных месторождений СССР. М.: ВНИИОЭНГ, 1982. – 40 с.
6. Е.А.Данилова, Д.А.Чернокожев. Применение компьютерных технологий экспресс-анализа и интерпретации результатов трассерных исследований для определения качества выработки неоднородных пластов // Электронное научное издание «Нефтегазовое дело», 2007. http://www.ogbus.ru/authors/Danilova/Danilova_1.pdf
7. М.С.Хозяинов, Д.А.Чернокожев. О возможности оценки соответствия фильтрационных моделей нефтяных пластов реальным объектам разработки по результатам индикаторных исследований // Электронное

- научное издание «ГЕОРАЗРЕЗ». http://georazrez.uni-dubna.ru/articles/2008/2-2/chernokozhev-o_vozmozhnosti_otcenky.pdf, 2008
8. РД 39-014-7428-235-89 Методическое руководство по технологии проведения трассерных исследований и интерпретации их результатов для регулирования и контроля процесса заводнения нефтяных залежей / Э.В.Соколовский, С.Н.Чижов, Ю.И.Тренчиков и др. Грозный: СевКавНИПИнефть, 1989. – 79 с.
 9. А.Бан, А.Ф.Богомолова, В.А.Максимов. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М.: «Красный печатник», 1962. – 276 с.
 10. W.E.Brigham, M.Abbaszadeh-Dehgani. Tracer testing for reservoir description. JPT v 39, № 5, pp. 519-527.
 11. M.Abbaszadeh-Dehgani, W.E.Brigham. Analysis of well-to-well tracer flow to determine reservoir layering. JPT, 1984, № 10, pp 1753-1762.
 12. В.А.Юдин. Принципы количественной интерпретации данных индикаторного метода для простейшей модели заводненного участка. М.: ВИНТИ, № 6447 Деп.
 13. Ю.В.Желтов, В.М.Рыжик, А.Я.Фельдман и др. Количественная интерпретация данных индикаторного метода при контроле за разработкой нефтяных месторождений с заводнением. М.: 1982.
 14. Г.А.Вирновский. Автомодельные обратные задачи теории нестационарной фильтрации в слоистых пластах // Изв. АН СССР, МЖГ, 1979. № 4. – с. 171-175.
 15. Г.А.Вирновский. исследование обратных задач двухфазной фильтрации в слоисто-неоднородных нефтяных пластах // Сб. научных трудов ВНИИ, № 61, 1977. с. 66-75.
 16. J.L.Landa. A procedure to Integrate Well Test Data, Reservoir Performance History and 4-D Seismic Information into a Reservoir Description // SPE 38653.
 17. B.Bourbiaux, R.Basquet, M.S.Cacas, J.M.Damel and S.Sandra S. An Integrated Workflow to Account for Multi-Scale Fractures in Reservoir Simulation Models: Implementation and Benefits // SPE 78489.
 18. A.Lange, R.Baskett and B.Bourbiaux. Hydraulic Characterization of Faults and Features Using Dual Medium Discrete fracture Network Simulation // SPE 88675.
 19. A.Lange, J.Bouzian and B.Bourbiaux. Tracer-Test Simulation on Discrete Network Models for the Characterization of Fractured Reservoirs // SPE 94344.
 20. J.E.Sylte, L.D.Hallenbeck, and L.K.Thomas. Ekofisk Formation Pilot Waterflood, paper SPE 18276 presented at Ann. Tech. Conf., Houston, TX, Oct. 2-5, 1988.
 21. S.A.Rogde. Interpretation of Radioactive Tracer Observations in the Gulfaks Field. Intl. Energy Agency Symp. on Res. Eng., Paris, France, Oct. 8, 1990.
 22. G.J.Lichtenberger. Field Applications of Interwell Tracers for Reservoir Characterization of Enhanced Oil Recovery // paper SPE 21652. Production Operation Symposium, Oklahoma City, OK, April 7-9, 1991.
 23. S.B.Allison. Analysis and Design of Field Tracers for Reservoir Description. M.S. thesis, The University of Texas at Austin, Austin, Texas (1988).
 24. S.B.Allison, G.A.Pope, and K.Sepehrnoori. Analysis of Field Tracer Response for Reservoir Description // J. Pet. Sci. Eng. (1991) 5, 173-186.
 25. M.Abbaszadeh-Dehgani. Analysis of Unit Mobility Ratio Well-to-Well Tracer Flow to Determine Reservoir Heterogeneity. Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, CA (Aug. 1982).
 26. K.Ohno, T.Nanba, and R.N.Horne. Analysis of an Interwell Tracer Test in a Depleted Heavy-Oil Reservoir // SPE 13672. California Regional Mtg., Bakersfield, CA, March 27-29, 1985.
 27. M.Abbaszadeh-Dehgani and W.E.Brigham. Analysis of Well-to-Well Tracer Flow to Determine Reservoir Layering // JPT (Oct. 1984) 1753-62.
 28. Д.А.Чернокожев. Совершенствование технологии индикаторных исследований для оценки фильтрационной неоднородности межскважинного пространства нефтяных пластов // Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. Дубна, 2008.

Базовые компоненты аппаратно-программного комплекса моделирования и управления тороидальной плазмой методом эпсилон-сетей на гетерогенных мини-суперкомпьютерах

Ф.С.Зайцев¹, А.Г.Шишкин², А.А.Лукьяница³,
Е.П.Сучков⁴, С.В.Степанов⁵, Ф.А. Аникеев⁶

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»,
Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия,
E-mail's : ¹ zaitsev@cs.msu.ru , ² shishkin@cs.msu.ru, ³ andrei_luk@mail.ru ,
⁴ suchkov.egor@gmail.com , ⁵ sergey.v.stepanov@gmail.com , ⁶ snowfed@gmail.com

Аннотация. С помощью гетерогенных мини-супер-ЭВМ НИИСИ РАН сделан существенный шаг в решении новых важных фундаментальных задач управления высокотемпературной плазмой тороидальной конфигурации. Разработаны и реализованы базовые компоненты аппаратно-программного комплекса моделирования и автоматического управления плазмой в реальном масштабе времени с обратной связью. В основе комплекса лежит принципиально новый, более точный и надёжный алгоритм управления, использующий решение с заданной точностью ряда обратных диагностических задач методом ε -сетей. Продemonстрирована возможность применения предложенной методики во время разряда для обеспечения управления с обратной связью границей и внутренними параметрами плазмы. Показано, что комплекс позволяет исследовать процессы в уже эксплуатируемых и вновь проектируемых термоядерных установках, решать задачи использования термоядерного синтеза для производства энергии. Выработаны рекомендации для инженерного исполнения систем управления плазмой. Сформулированы направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: гетерогенные суперкомпьютеры, управление, тороидальная плазма, эпсилон-сети.

1. Введение

Ведущие страны мира, включая Россию, ведут интенсивные исследования по переходу к термоядерной энергетике, основанной на безопасном, практически неисчерпаемом источнике энергии.

С участием России строится международный термоядерный реактор-токамак ITER (www.iter.org). В Евросоюзе функционирует самый крупный в мире токамак JET (www.euro-fusion.org), на котором в 1991 г. впервые осуществлена реакция управляемого термоядерного синтеза. В Великобритании на большом сферическом токамаке MAST (www.ccfe.ac.uk) достигнуты рекордные параметры плазмы. В Германии работает токамак ASDEX (www.ipp.mpg.de/16195/asdex), имеющий хорошо развитую диагностику плазмы. В России строится токамак T-15 (НИЦ «Курчатовский институт», www.nrcki.ru/pages/main/6015/8698/7145/index.shtml). В Японии международное сообщество будет сооружать первую термоядерную электростанцию DEMO.

Страны, владеющие технологией управляемого термоядерного синтеза (UTC), окажутся вне конкуренции.

Основная сложность исследования UTC состоит в большом разбросе временных и пространственных масштабов имеющих место явлений, а также многомерности зависимостей характеристик процессов от фазовых переменных. Кроме того, требуется детальная проработка диагностик и систем управления плазмой, инженерных решений с точки зрения точности, надёжности, эффективности, безопасности и долговечности. Полноценное решение перечисленных задач невозможно без применения высокопроизводительной вычислительной техники.

Управление динамикой плазмы является одной из центральных фундаментальных проблем теоретического и экспериментального изучения термоядерного синтеза и проекта перехода к термоядерной энергетике. Однако методы управления, особенно внутренними параметрами плазмы, остаются слабо проработанными из-за необходимости использования комплексных математических моделей, решения ряда сложных некорректных обратных задач диагностики плазмы, разработки объёмного наукоёмкого программного обеспечения и применения высокопроизводительной вычислительной техники. На практике при построении контроллеров обычно применяются полуэмпирические, сильно упрощённые подходы или

используется предписанный (программный) режим управления, что приводит к длительной и дорогостоящей работе по экспериментальному подбору параметров систем управления и большому количеству преждевременных срывов разряда во время научно-исследовательских кампаний.

Основными целями настоящей работы являются: описание концепции и базовых компонентов аппаратно-программного комплекса моделирования и управления тороидальной плазмой методом ϵ -сетей на гетерогенных мини-суперкомпьютерах; представление новых алгоритмов управления границей и внутренними параметрами плазмы в реальном масштабе времени с обратной связью; краткое описание возможностей разработанных графических интерфейсов пользователя; иллюстрация работы макета комплекса.

Проводимые исследования ориентированы на создание фундаментальных основ прорывных технологий по реализации существенной компоненты термоядерной электростанции – системы управления плазмой. Внедрение результатов на действующих и разрабатываемых реакторах-токамаках позволит заметно повысить эффективность дорогих экспериментальных исследований, уменьшить их стоимость и сократить сроки перехода к термоядерной энергетике.

Базовые компоненты аппаратно-программного комплекса разрабатываются в НИИСИ РАН в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 43 и № 17.

Важной компонентой комплекса является созданный в НИИСИ РАН совместно с другими организациями метод ϵ -сетей для решения с заданной точностью обратных задач диагностики плазмы. Данный метод открывает возможность решения новых задач о моделировании плазмы в токамаке и тонком управлении параметрами разряда в реальном масштабе времени с обратной связью. В мире методикой ϵ -сетей пока никто не владеет и не может решать задачи полноценного управления разрядом.

Вычисления по методу ϵ -сетей, реализованные методами классического параллельного программирования, требуют использования суперкомпьютеров рекордной производительности, таких как, например, «Ломоносов» в МГУ. Однако разработанная в НИИСИ РАН новая технология гетерогенных CPU/GPGPU вычислений на базе стандарта OpenCL [4, 5] позволяет за счёт усложнения параллельного алгоритма применять мини-супер-ЭВМ. Затраты на разработку алгоритма окупаются невысокой стоимостью и компактностью аппаратуры. Кроме того, невысокие эксплуатационные расходы на содержание мини-супер-ЭВМ позволяют выделить её целиком для решения задачи управления в реальном времени. При этом исключается негативное влияние режима разделения ресурсов, неизбежно возникающего при эксплуатации больших супер-ЭВМ общего пользования.

В работе продемонстрирована принципиальная возможность использования предложенной методики во время разряда для обеспечения управления с обратной связью границей и внутренними параметрами

плазмы. Показано, что разрабатываемый комплекс применим к исследованию процессов в уже эксплуатируемых и вновь проектируемых термоядерных установках разного масштаба и конструкций, к решению задач использования термоядерного синтеза для производства энергии.

2. Основные составляющие комплекса моделирования и управления плазмой

Аппаратно-программный комплекс строится на базе создаваемой в НИИСИ РАН суперкомпьютерной вычислительной техники. Взаимодействие пользователя с прикладным программным обеспечением осуществляется с помощью набора графических интерфейсов. Объектом управления может быть либо модель плазмы той или иной степени детализации, либо реальная плазма в токамаке. Общая схема комплекса представлена на рис. 1. Стрелками обозначены направления информационных потоков.

Модуль обработки диагностики осуществляет восстановление границы и внутренних параметров плазмы по данным измерений на основе решения в реальном масштабе времени с заданной точностью обратных задач методом ϵ -сетей.

Информация о состоянии плазмы передаётся модулю расчёта управления, который в реальном времени уточняет при необходимости контроллер, вырабатывает управляющие сигналы и передаёт их в модель плазмы или исполнительные устройства реальной установки.

В комплекс заложена возможность простого переключения между моделями плазмы различного уровня сложности, а также между управлением моделью плазмы и управлением плазмой в реальном устройстве.



Рис. 1. Основные компоненты комплекса.

3. Модель функционирования токамака

Аппаратно-программный комплекс позволяет работать с различными моделями функционирования токамака. В качестве базовой используется модель, реализованная в коде SCoPE (Self-Consistent Plasma Evolution) [1-3]. Физические и математические составляющие модели подробно описаны в монографиях [2] и [3]. Формулировка модели громоздка, поэтому здесь остановимся лишь на её общей характеристике.

Рассматриваются временные масштабы, много большие времени развития МГД-неустойчивостей, приблизительно от сотых или тысячных долей длительности разряда. Модель кода SCoPE хорошо развита и верифицирована [1-3], позволяет самосогласованно учитывать десятки особенностей поведения плазмы и описывать разряды в установках различных размеров и конструкций: ITER, JET, MAST, T-15.

История разработки и применения кода SCoPE насчитывает более 20 лет. Код SCoPE развивался, в том числе, с целью устранения целого ряда недостатков, имевшихся в других кодах. В частности, в SCoPE аккуратно учтены: эффекты электромагнитной индукции, особенно важные для решения задач управления плазмой; свободная граница плазмы; произвольное аспектное отношение тора, то есть код применим как к традиционным, так и к сферическим токамакам; спитчеровская и неоклассическая модели проводимости плазмы; наличие токов в плазме, вызванных градиентом давления; возможность узко локализованной генерации тока в плазме ВЧ-волнами и инжекцией нейтральных частиц; наличие проводящих стенок вакуумной камеры и пассивных элементов; описание плотности и температуры плазмы с помощью транспортных уравнений или импорта экспериментальных измерений; различные подходы к управлению плазмой.

Кроме того, код SCoPE имеет интерфейсы для ввода данных из других кодов, таких как, например, кинетический код FPP-3D, кинетический Монте-Карло код LOCUST, код реконструкции равновесия EFIT, эволюционно-диагностический код TRANSP (см. ссылки в книгах [2] или [3]).

В типичных расчётах SCoPE использует следующую входную информацию.

- Геометрия установки, то есть положение стенок камеры и пассивных элементов.
- Ток в катушках тороидального поля $I_{rod}(t)$ как функция времени t .
- Координаты катушек полоидального поля и токи в них. В задаче со свободной границей эти токи переопределяются в SCoPE из условия достижения заданных формы и положения плазмы. Токи в катушках полоидального поля также используются для расчёта наведённого в плазме тока.
- Положение обмоток соленоида и токи в них. В задаче управления ток в соленоиде рассчитывается из условия приближения полного тока плазмы к задан-

ному. Токи в обмотках соленоида учитываются при расчёте наведённого в плазме тока.

- Координаты точек границы плазмы как функции времени. В задаче с фиксированной границей эти точки непосредственно ограничивают плазму. В задаче со свободной границей ищется конфигурация с наиболее близкой к заданным точкам границей.

- Полный ток в плазме $I_p(t)$. Если решается задача управления полным током, то минимизируется отличие рассчитываемого тока от заданного $I_p^0(t)$.

- Начальная плотность тороидального тока плазмы $j_\eta(t=0, R, Z)$.

- Масса m_α , заряд e_α , плотность $n_\alpha(t, z)$, и температура $T_\alpha(t, z)$ для каждого сорта α частиц плазмы, где $z = \gamma/\gamma_\alpha$, γ_α – метка границы плазмы. Кинетическое давление рассчитывается либо по формуле $p(t, z) = \sum_\alpha n_\alpha(t, z) T_\alpha(t, z)$, либо задаётся во входных данных, например, по экспериментальным измерениям. В качестве альтернативы SCoPE может определять $n_\alpha(t, z)$ и $T_\alpha(t, z)$ на основе решения транспортных уравнений.

- Z-эффективное $Z_{eff}(t, z)$.

- NBI-ток (Neutral Beam Injection) и дополнительное давление быстрых ионов, вызванное инжекцией.

SCoPE генерирует большое количество важной информации о плазме и установке. Выходными данными, в частности, являются:

- Функция полоидального потока $\psi(t, R, Z)$ и её линии уровня (магнитные поверхности) $\psi = const$ как функции (t, R, Z) , где (R, Z) – цилиндрические координаты.

- Функция полоидального тока $F(t, \psi)$, связанная с тороидальным магнитным полем $B_{tor} = F / R$.

- Плотность тороидального тока плазмы $j_\eta(t, R, Z)$.

- Коэффициент запаса устойчивости $q(t, \psi) = -\partial\Phi/\partial\psi/(2\pi)$, где Φ – функция потока тороидального магнитного поля.

- Координаты магнитной оси в разные моменты времени. Величина магнитного поля на магнитной оси.

- Напряжение электрического поля на обходе тора.

- Токи в катушках полоидального магнитного поля, соленоиде, стенках камеры как функции времени.

- Компоненты магнитного $\mathbf{B}(t, R, Z)$ и электрического $\mathbf{E}(t, R, Z)$ полей.

- Кинетическое давление плазмы $p(t, \psi)$.

В SCoPE реализован ряд современных численных методов [2, 3], обеспечивающих расчёт эволюции плазмы с требуемой точностью.

Применены подходы объектно-ориентированного программирования. Современная версия кода состоит из порядка 150 модулей общим объемом более 60 тыс. строк на языке Fortran 2008.

Исторически SCoPE создавался как последовательная программа. При этом время проведения одного вычислительного эксперимента, особенно для разрядов со сложной динамикой и большой площадью поперечного сечения плазмы, может исчисляться десятками часов. Например, расчет эволюции плазмы в установке ITER занимает от 10 до 20 часов на одном 4х-ядерном процессоре семейства Intel Core i7. Поэтому для проведения масштабных вычислений по моделированию управления плазмой необходимо распараллеливание программ.

Код SCoPE оптимизирован для эффективного использования на гетерогенных вычислительных комплексах НИИСИ РАН. Применён метод распараллеливания по технологии MPI (Message Passing Interface) в последней версии пакета MPICH2.

Помимо MPI для оптимизации расчетов производилась настройка параметров реализованных в SCoPE алгоритмов с целью сокращения времени вычислений без потери точности.

В результате на четырехядерном процессоре семейств Intel Core i7 время типичного расчета эволюции равновесия удалось сократить почти в пять раз.

Примеры работы аппаратно-программного комплекса с использованием кода SCoPE в качестве модели плазмы приведены ниже.

4. Общая характеристика метода ε -сетей

Во многих приложениях возникает необходимость решения некорректно поставленных задач. Особенно важную роль такие задачи играют в проблеме управляемого термоядерного синтеза (УТС), так как высокие температуры не позволяют проводить измерения непосредственно внутри плазмы.

Входные данные некорректной задачи обычно заданы с некоторой погрешностью. При этом малым изменениям входных данных в некорректной задаче могут соответствовать большие изменения её выходных данных [6]. Однако методы решения некорректных задач обычно разыскивают одно решение и не дают ответа на вопрос о наличии других существенно отличающихся от найденного решений, удовлетворяющих тем же входным данным в рамках заданной погрешности. Указанные обстоятельства сильно осложняют получение надёжных результатов.

Относительно недавно для численного решения некоторого класса некорректных задач разработан метод ε -сетей [7-10, 2, 3], который позволяет с заданной погрешностью ε исследовать наличие существенно различных решений или обосновать их отсутствие. В общем случае метод пригоден для численного исследования с погрешностью ε вопроса о корректности задачи, а именно, существования и единственности решения, устойчивости по входным данным. В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ множество функций ε -

сети даёт весь исходный класс функций, что позволяет с уменьшением ε увеличивать точность анализа в смысле приближения к исходному классу функций.

В настоящее время метод ε -сетей является единственным методом, позволяющим решить целый ряд важнейших задач диагностики плазмы в УТС, а именно: выделить наиболее близкое к реальному физическому процессу решение задачи реконструкции равновесия плазмы с приближённо заданными входными данными; рассчитать с заданной точностью погрешность (интервалы доверия) реконструкций; найти все существенно различающиеся реконструкции, удовлетворяющие одной и той же погрешности измерений (входных данных); исследовать эффективность различных диагностик (различных дополнительных условий) в выделении адекватному реальности решения; оценить требуемую точность измерений; изучить влияние изменений в модели плазмы на величину погрешности реконструкций; определить оптимальное число и расположение измерительных датчиков.

На решении задач диагностики основаны системы управления плазмой в реальном времени с обратной связью. Наиболее важными являются задачи управления границей и внутренними параметрами плазмы. Метод ε -сетей даёт уникальную методику решения таких задач управления.

В простейших случаях метод ε -сетей позволяет получать содержательные результаты по обработке измерений на обычном персональном компьютере, без каких либо ускорителей. Однако повышение точности и скорости расчётов требует применения высокопроизводительной вычислительной техники.

В НИИСИ РАН разработаны и изучены свойства параллельных алгоритмов метода ε -сетей для двух типов архитектур: с центральными процессорами (CPU) и графическими ускорителями (GPGPU) [10].

CPU-архитектуры обычно работают по технологиям параллельных вычислений MPI и MPI/OpenMP. К таким архитектурам относятся большинство современных супер-ЭВМ, в том числе компьютеры «Ломоносов» и «Blue Gene/P» в МГУ имени М.В. Ломоносова, имеющие $\sim 10^4$ CPU-ядер, а также проектируемые экзафлопные вычислительные комплексы с $\sim 10^6$ ядер.

В гибридных архитектурах используются специализированные графические или другие акселераторы, работающие по технологиям OpenCL, CUDA, OpenACC и т.д. Такие архитектуры позволяют за счёт усложнения алгоритма добиться высокой производительности на относительно недорогих и компактных аппаратных средствах.

Рассматривается следующий класс задач. В области Ω задано уравнение

$$L(\mathbf{x}, u) = b(\mathbf{x}, f(u)), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \Omega$, L – некоторый заданный оператор, b – заданная функция, $u = u(\mathbf{x})$ и $f = f(u)$ – искомые функции.

Известно, что $u \in [0, 1]$, а $f(u)$ лежит в некоторой заданной полосе $g^-(u) \leq f(u) \leq g^+(u)$,

$d^-(u) \leq f'(u) \leq d^+(u)$. К уравнению (1) добавлены дополнительные условия

$$l_1(\mathbf{x}, u) = b_1(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2)$$

$$\|l_2(\mathbf{x}, u) - b_2(\mathbf{x}, u)\| / \|b_2(\mathbf{x}, u)\| \leq \delta, \quad (3)$$

Здесь Γ – граница области Ω ; l_1 , l_2 и b_1 , b_2 – известные операторы и функции; δ – заданная относительная погрешность. Обычно наибольший интерес представляет равномерная норма – точная верхняя грань на множестве $\Omega \cup \Gamma$. Предполагается, что условие (2) обеспечивает возможность решения уравнения (1) в случае, если функция $f(u)$ известна. Задачу (1), (2) с заданной $f(u)$ будем называть прямой. Условие (3) добавляется для решения задачи (1)-(3) с неизвестной $f(u)$. Такую задачу будем называть обратной.

Требуется найти все сильно различающиеся решения $(u, f(u))$ обратной задачи (1)-(3). Термин "сильно (существенно) различающиеся решения" здесь не конкретизируется. Критерий отбора существенно различных пар $(u, f(u))$ зависит от цели исследований. Во многих случаях рассматривается заметное отличие в количественном или качественном поведении функций $f(u)$ и/или u в некоторой области точек $\mathbf{x}$.

Представленные ниже алгоритмы легко модифицируются для решения более общей задачи, в которой в правой части (1) фигурирует не одна, а набор одномерных функций $b(\mathbf{x}, f_1(u), f_2(u), \dots, f_{n_f}(u))$, а остальные операторы и функции в (1)-(3) являются многомерными. В постановке задачи могут присутствовать несколько условий вида (2) или (3). Метод обобщается и на случай векторной функции u .

Предполагается, что метод решения прямой задачи (1), (2) известен. Основная идея решения обратной задачи (1)-(3) состоит в построении конечного множества функций, покрывающего с заданной абсолютной погрешностью ε некоторый класс функций $f(u)$ (т.е. построение ε -сети), решения для каждого элемента этого множества прямой задачи (1), (2), проверки выполнения условия (3) и отбора по некоторому критерию сильно различающихся решений.

Последовательные алгоритмы построения ε -сети представлены в [7-9, 2, 3]. Рассмотрены ε -сети полиномов, сплайнов и их комбинации. В [2], п. 2.4. подробно описаны доказательства утверждений о числе элементов и других параметрах ε -сети, при которых достигается заданная погрешность ε , а также изложены стратегии применения ε -сетей. Постановки и решение конкретных обратных задач и задач управления приведены в [2], в п. 1.7, 1.8, 2.3, 2.5, 4.9.

Техника ε -сетей представляет собой переборный алгоритм, с помощью которого разыскиваются функции, наилучшим образом удовлетворяющие заданным условиям. Метод основан на решении для каждого элемента ε -сетей некоторой отдельной задачи. Условие получения решения с высокой точностью приводит к необходимости использования ε -сети со значительным количеством элементов и выполнения

большого объема вычислений. Однако независимость задач для различных элементов ε -сети позволяет провести полное распараллеливание алгоритма [10].

Построение самой ε -сети также может быть распараллелено. Но такая задача представляет меньший интерес, так как её решение требует гораздо меньше вычислений. Кроме того, некоторый набор ε -сетей может быть построен один раз заранее и далее использоваться многократно для решения определённого класса задач с различными входными данными.

Распараллеливание метода ε -сетей для CPU и гибридных архитектур на базе GPGPU имеет свои особенности. Оперативная память и быстродействие одного процессора (или ядра) действующих и проектируемых CPU/MPI-систем позволяют решать задачу для одного или нескольких элементов ε -сетей без использования межпроцессорных обменов, что упрощает алгоритм и повышает его эффективность.

В GPU-архитектурах локальная память нити обычно мала и требуются обмены между различными типами памяти или специальные вычислительные алгоритмы. Однако количество нитей может быть на два-три порядка больше количества процессоров в CPU-системах, что обеспечивает высокое ускорение. Кроме того, затраты на разработку более сложного алгоритма компенсируются значительно меньшей стоимостью и компактностью GPGPU-систем.

Идея алгоритма распараллеливания метода ε -сетей для CPU/MPI-систем относительно проста. Необходимо распределить задачи для всех элементов ε -сети по процессорам, решить задачу для каждого элемента и отобрать решения, наилучшим образом удовлетворяющие заданным условиям.

Время обработки одного элемента ε -сети может варьироваться от элемента к элементу, поэтому ускорение и эффективность использования аппаратуры повышаются при обеспечении равномерной загрузки процессоров с учётом их высвобождения.

Параллельный метод для программных моделей OpenCL, CUDA, OpenACC строится аналогично. Дополнительно применяется алгоритм обмена между различными типами памяти и используется специализированная для конкретного акселератора программа решения системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей.

Описанные параллельные алгоритмы метода ε -сетей реализованы для CPU/MPI и CPU/GPGPU технологий в коде SDSS (Substantially Different Solution Searcher) [7-9, 2, 3]. Объем кода – более 30 тыс. строк на языке Fortran 2008.

Fortran даёт возможность помимо MPI использовать встроенную в этот язык параллельную технологию ускорения вычислений SIMD, его преимущества для работы со структурами числовых данных и гибкие средства задания точности машинного представления чисел. В GPU-версии SDSS для работы с памятью акселераторов и обращения к специализированному для акселераторов численному алгоритму использован язык C++.

SDSS позволяет решать методом ε -сетей различные обратные задачи о реконструкции параметров плазмы.

5. Восстановление границы плазмы методом ε -сетей

Методы управления плазмой основаны на решении обратных задач реконструкции параметров плазмы по данным измерений. Задачу реконструкции можно разбить на две подзадачи [2, 3, 8]: восстановление границы плазмы и восстановление внутренних параметров плазмы. В настоящем разделе рассмотрена первая задача. Вторая задача описана в следующем разделе. Построение решений обеих задач основано на применении соответствующей модификации метода ε -сетей.

Математически задача восстановления границы плазмы формулируется следующим образом. Обозначим оператор Грэда-Шафранова [2] в цилиндрических координатах

$$\Delta^* \psi \equiv R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2}.$$

Вне плазмы выполнено уравнение

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R \sum_{i=1}^L J_i(t) \delta(R - R_{c,i}) \delta(Z - Z_{c,i}), \quad (1)$$

где $(R_{c,i}, Z_{c,i})$ – координаты витков токов в полоидальных катушках и соленоиде, $J_i(t)$ – величины самих токи.

В точках измерения (R_k, Z_k) вне плазмы известна функция полоидального потока $\psi_{e,k}$ с погрешностью $\delta_k: |\psi_k - \psi_{e,k}| / |\psi_{e,k}| \leq \delta_k$, $k = 1, \dots, K_e$.

Требуется найти границу плазмы Γ_p , под которой понимается замкнутая линия уровня функции ψ максимальной ширины. То есть такая замкнутая линия уровня, что высекаемый ей на оси R отрезок имеет максимальную ширину. К уравнению (1) добавляются дополнительные условия

$$\psi|_{\Gamma_p} = \psi_b, \quad \psi|_{\Gamma_w} = \psi_w, \quad \Delta^* \psi = -\mu_0 R j_{SOL},$$

где ψ_b – значение ψ на границе плазмы, ψ_w – значение ψ вблизи стенок камеры и пассивных элементов Γ_w ; j_{SOL} – плотность тока в приграничной с плазмой области. Значения ψ_b и ψ_w определяются в процессе решения задачи, j_{SOL} задается из отдельной модели.

В задачу можно добавить и другие ограничения: данные диагностики D-alpha, видеосъемку плазмы, наличие лимитров плазмы, априорную информацию о форме границы плазмы вблизи X-точки и т.д. Метод ε -сетей позволяет полноценно и относительно легко учитывать большое количество различных дополнительных условий.

Рассматриваемая постановка задачи является новой. В ней используется информация о значении функции полоидального потока вблизи стенок камеры и пассивных элементов, а также информация о токах в приграничных с плазмой области, управляющих катушках и соленоиде.

Численный метод решения задачи основан на приведении её к системе нелинейных алгебраических уравнений, линеаризации и решении набора линейных алгебраических систем.

Будем искать функцию ψ в виде многочлена

$$\psi = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} \rho^i z^j, \quad \rho = R^2 - R_0^2, \quad z = Z - Z_0,$$

а границу плазмы в параметрической форме

$$\begin{cases} R = R(\xi) \\ Z = Z(\xi) \end{cases}, \quad \xi \in [-\pi, \pi]$$

Помимо точек $P_{e,k}$, $k = 1, \dots, K_e$, рассмотрим:

K_v точек $P_{v,k}$, $k = K_e + 1, \dots, K_e + K_v$, в вакууме; K_b точек

$P_{b,k} = (R(\xi_k), Z(\xi_k))$, $k = K_e + K_v + 1, \dots, K_e + K_v + K_b$,

на границе плазмы; K_w точек $P_{w,k}$ вблизи стенок камеры и пассивных элементов. Имеем систему уравнений

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} \rho_k^i z_k^j = \psi_k, \quad k = 1, \dots, K_e \quad (2)$$

$$\Delta^* \left(\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} \rho_k^i z_k^j \right) = 0, \quad (3)$$

$$k = K_e + 1, \dots, K_e + K_v;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} \rho_k^i z_k^j = \psi_b \\ R = R(\xi_k) \\ Z = Z(\xi_k) \end{cases} \quad (4)$$

$$k = K_e + K_v + 1, \dots, K_e + K_v + K_b;$$

$$\Delta^* \left(\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} \rho_k^i z_k^j \right) = -\mu_0 R_k J_k(t), \quad (5)$$

$$k = K_e + K_v + K_b + 1, \dots, K_e + K_v + K_b + L$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} \rho_k^i z_k^j = \psi_w, \quad (6)$$

$$k = K_e + K_v + K_b + L + 1, \dots, K_e + K_v + K_b + L + K_w$$

где (ρ_k, z_k) соответствует точкам $P_{e,k}, P_{v,k}, P_{b,k}, P_{c,k}, P_{w,k}$.

Рассмотрим некоторый класс кривых $(R(\xi), Z(\xi))$, то есть класс границ плазмы. Для каждой кривой из этого класса уравнения (2)–(6) дают возможность определить функцию $\psi(R, Z)$ вне плазмы из систем линейных алгебраических уравнений. В этом и состоит линеаризация задачи. Построение класса границ проводится с помощью ε -сетей.

Система линейных алгебраических уравнений для искоемых констант a_{ij}, ψ_b, ψ_w имеет прямоугольную матрицу и может быть разрешена, например, методом регуляризации А.Н. Тихонова. Параметр регуляризации выбирается из условия минимума невязки системы (2)–(6). С целью усиления или уменьшения роли невязки одной группы уравнений

по отношению к другой вместо невязки минимизируется функционал, составленный из суммы невязок групп уравнений с весами. Кроме того, можно добиться более точного описания некоторой части границы, например, вблизи X-точки, если в функционале выделить соответствующую часть невязки для (4) с большим весом.

Перебирая все границы плазмы из заданного класса, получим различные значения данного функционала. В качестве искомой границы плазмы принимается та кривая, на которой функционал имеет наименьшее значение.

Алгоритм поиска границы плазмы методом ε -сетей распараллелен для архитектуры гетерогенных мини-суперкомпьютеров НИИСИ РАН с процессорами Intel Xeon. Каждый процесс алгоритма требует $\sim 100\text{Mb}$ RAM. Полный объём необходимого дискового пространства $\sim 500\text{Mb}$. Скорость расчёта составляет ~ 180000 элементов ε -сети в секунду, что более чем достаточно для использования предложенного метода в системе управления границей плазмы в реальном времени с обратной связью. Для сравнения скорость расчёта на обычном PC оставляет ~ 1000 элементов ε -сети в секунду.

Ускорение и эффективность параллельного алгоритма показаны на рисунках 2 и 3.

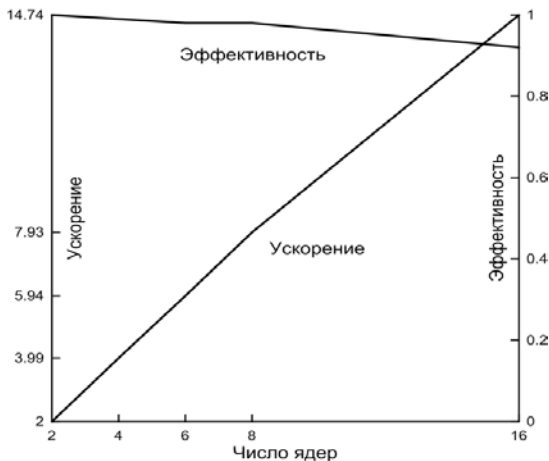


Рис. 2. Ускорение и эффективность на одном CPU.



Рис. 3. То же на нескольких CPU-узлах.

6. Восстановление внутренних параметров плазмы методом ε -сетей

Как уже отмечено, задачу реконструкции параметров плазмы можно разбить на две подзадачи: восстановление границы плазмы и восстановление внутренних параметров плазмы. В настоящем разделе рассматривается вторая задача.

Математическая постановка задачи о восстановлении внутренних параметров плазмы является достаточно громоздкой, поэтому здесь не приведена. Формулировка этой задачи и методы её решения подробно описаны в книге [2] в разделах 1.8.1, 2.5, 2.5.7, 4.10. Здесь мы остановимся только на общей схеме решения обратной задачи о восстановлении внутренних параметров плазмы методом ε -сетей.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Реконструкция границы плазмы с помощью решения внешней задачи (см. предыдущий раздел). Граница плазмы Γ_p и функция полоидального потока ψ , определённые на этой стадии, используются на шагах 2-6 в качестве входных данных для решения внутренней задачи.

2. Реконструкция кинетического давления плазмы p и функции полоидального тока F (связанной с тороидальным магнитным полем $B_{tor} = F/R$) одним из способов, описанных в [2, раздел 2.5]. На данном этапе не требуется высокая точность восстановления функций p и F , так как эти функции используются на шаге 3 лишь для задания границ области построения ε -сети. Поэтому вместо решения обратной задачи здесь можно воспользоваться решением прямой задачи с некоторым приближением для функций p и F .

3. Задание областей вокруг функций p и F , в которых будут искаться другие функции, также удовлетворяющие погрешностям входных данных (измерений). Построение ε -сети для функций p и ε -сети для функций F с помощью кода SDSS.

4. Решение для каждой комбинации элементов p и F из соответствующих ε -сетей стандартной прямой задачи с заданной границей плазмы для уравнения равновесия Грэда-Шафранова. Нахождение набора троек (ψ_k, p_k, P_k) .

5. Выбор троек (ψ_k, p_k, P_k) , которые удовлетворяют базовым дополнительным условиями и той или иной комбинации специальных дополнительных условий [2, 3].

6. Использование отобранных троек (ψ_k, p_k, P_k) для решения важнейших задач:

- Вычисление диапазона погрешностей (интервала доверия) для реконструкций внутренних параметров плазмы.
- Анализ наличия существенно различающихся решений обратной задачи, удовлетворяющих одной и той же погрешности измерений (входных данных).

- Определение эффективности дополнительных диагностик (дополнительных условий) в выделении решения обратной задачи, соответствующего реальному физическому процессу.

- Расчёт максимально допустимой погрешности измерений для диагностической аппаратуры.

- Определение оптимального количества и расположения измерительных датчиков.

- Изучение влияния модификаций модели плазмы на величину интервала доверия. В том числе: (а) анизотропного давления плазмы, (b) учёта измерений электрического напряжения на обводе плазмы, (с) включения в модель закона Ома для эволюции плотности тока в плазме, (d) наличия железного сердечника, (е) присутствия пассивных элементов, (f) аксиальной асимметрии равновесия плазмы.

В задаче управления внутренними параметрами плазмы наибольший интерес представляет реконструкция функций p и F с минимальной погрешностью. Зная разницу между восстановленными (p, F) и желаемыми, можно рассматривать задачу автоматического управления профилями p и F с помощью воздействия ВЧ-полем и/или инжекцией, а также задачи управления профилями плотности тока и коэффициента запаса устойчивости.

Авторами работы впервые в мире предложен принципиально реализуемый на практике способ управления внутренними параметрами плазмы в реальном времени с обратной связью на основе решения с заданной точностью обратной задачи для уравнения равновесия. Такую возможность дают параллельные алгоритмы метода ϵ -сетей [9, 10].

Показано, что при ~ 1000 измерений в минуту можно столько же раз решать задачу восстановления равновесия с точностью $\sim 8\%$ в классе полиномов 4-й степени или слайдов по 6 точкам. Поэтому предложенные алгоритмы уже сейчас могут быть использованы в системах автоматического управления формой и положением плазмы в реальном времени с обратной связью. Применение более производительной вычислительной техники нового поколения повысит точность решения задач в реальном времени и расширит доступные классы функций.

7. Новые алгоритмы управления плазмой

Задачи управления плазмой в токамаках осложняются рядом факторов, которые должны учитываться при построении контроллеров:

- Поведение плазмы является нелинейным.
- Экспериментальные измерения, численные модели и методы содержат погрешности.
- Имеется достаточно сильное запаздывание. Например, ток в плазме не меняется мгновенно под воздействием управлений, так как требуется некоторое время для проникновения электродвижущей силы внутрь плазмы. В терминах теории управления такой объект называется объектом с запаздыванием.

- Проводимость плазмы на периферии значительно ниже, чем в центре. Поэтому для создания тока в плазме необходимо достаточно сильно менять ток в соленоиде. Однако чрезмерная электродвижущая сила (электрическое напряжение) по мере проникновения в центральные области плазмы может привести к излишне высокому нарастанию тока из-за большей проводимости плазмы в центре.

- Меняющееся во времени магнитное поле наводит токи в стенках вакуумной камеры и пассивных элементах. Эти токи могут оказывать заметное влияние на поведение плазмы.

- Из-за инженерных ограничений приращенных токов в соленоиде и катушках полоидального магнитного поля не должны быть слишком большими.

- Плазма может резко менять своё состояние, например, из-за развития неустойчивостей.

Авторами работы предложен новый алгоритм системы автоматического управления плазмой с обратной связью на основе метода ϵ -сетей. В отличие от традиционных подходов в УТС, помимо применения ϵ -сетей алгоритм позволяет строить контроллер динамически в реальном времени на основе данных о состоянии плазмы в предыдущие моменты времени.

Пусть $h_1, \dots, h_N$ – разности между желаемыми и имеющимися параметрами плазмы, точнее некоторого приближающего плазму объекта. Например, $h_1, \dots, h_{N-2}$ – расстояния между точками, через которые должна проходить граница, и соответствующими им точками реально получающейся границы, h_{N-1} – разность между требуемым полным тороидальным током и реально имеющимся, h_N – между приращенными заданного и реального токов.

Исходя из априорных сведений о том, что токи $\mathbf{J}$ в полоидальных витках влияют, в основном, на форму и положение плазмы, а их производные по времени $\dot{\mathbf{J}}$ – на полный тороидальный ток в плазме I_p , примем следующее представление для функциональной зависимости ошибки

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(t, I_p(t), \dot{\mathbf{J}}(t), \mathbf{J}(t)).$$

Производные $\dot{\mathbf{J}}(t)$ входят только в I_p , так как они в большей мере влияют именно на I_p , а не на положение границы плазмы. Явная зависимость $\mathbf{h}$ и I_p от t учитывает возможность изменения этих величин по времени за счёт отличных от $\mathbf{J}(t)$ и $\dot{\mathbf{J}}(t)$ параметров объекта, например, за счёт температуры или плотности плазмы.

Разложив ошибку $\mathbf{h}$ по формуле Тейлора и введя обозначения

$$\delta \mathbf{J}(t_n) \equiv \dot{\mathbf{J}}(t_n) \tau = \mathbf{J}(t_n) - \mathbf{J}(t_{n-1}) + O(\tau^2),$$

$$\delta \dot{\mathbf{J}}(t_n) \equiv \frac{d\dot{\mathbf{J}}(t_n)}{dt} \tau = \dot{\mathbf{J}}(t_n) - \dot{\mathbf{J}}(t_{n-1}) + O(\tau^2),$$

$$\tau \equiv t_{n+1} - t_n.$$

с точностью до членов второго порядка $O(\tau^2)$ имеем

$$\mathbf{h}[n+1] = \mathbf{h}[n] + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial I_p} \left(\frac{\partial I_p[n]}{\partial t} \tau + \frac{\partial I_p}{\partial \mathbf{J}} \delta \mathbf{J}[n] \right) + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial \mathbf{J}} \delta \mathbf{J}[n]$$

где для краткости номер шага по времени указан в квадратных скобках.

С учётом

$$\delta \mathbf{J}[n] \equiv \mathbf{J}[n] \tau = (\mathbf{J}[n] + \mathbf{J}[n-1] - \mathbf{J}[n-1]) \tau = (\mathbf{J}[n-1] + \delta \mathbf{J}[n]) \tau + O(\tau^2),$$

получаем для линеаризованной ошибки форму представления с явным выделением величины $\delta \mathbf{J}[n]$, которую далее выберем в качестве управления,

$$\mathbf{h}[n+1] = \mathbf{h}[n] + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial \mathbf{J}} \tau \mathbf{J}[n-1] + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial I_p} \frac{\partial I_p[n]}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial I_p} \frac{\partial I_p[n]}{\partial \mathbf{J}} + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial \mathbf{J}} \right) \tau \delta \mathbf{J}[n] \quad (1)$$

Динамику подлежащего управлению объекта будем описывать вектором состояний $\mathbf{x}$, удовлетворяющим дискретному уравнению

$$\mathbf{x}[n+1] = A\mathbf{x}[n] + B\mathbf{u}[n] \quad (2)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор управлений.

С учётом априорных сведений о влияющих на границу и ток факторах, в качестве вектора управлений возьмём

$$\mathbf{u}[n] = \delta \mathbf{J}[n]$$

Вектор состояний $\mathbf{x}$ и матрицы A , B построим с использованием линеаризованной формулы для $\mathbf{h}$.

Пусть

$$\mathbf{x}[n] = \begin{pmatrix} \mathbf{h}[n] \\ \tau \mathbf{J}[n-1] \\ \tau \left(\frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial I_p} \frac{\partial I_p[n]}{\partial t} \right) \end{pmatrix}.$$

При таком выборе вектора $\mathbf{x}$ состояние объекта характеризуется отклонением $\mathbf{h}$ параметров объекта от заданных, приращением управляющих токов $\tau \mathbf{J}[n-1] = \delta \mathbf{J}[n-1]$ в предыдущий момент времени и приращениями, связанными с явными зависимостями $\mathbf{h}$ и I_p от времени.

В качестве матрицы A рассмотрим

$$A = 0.999 \begin{pmatrix} I & C_1 & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$C_{1,ik} = \left(\frac{\partial h_i[n]}{\partial J_k} \right), i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, N_{coil}$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности, N_{coil} – число элементов в векторе $\mathbf{J}$. В отсутствии управления $\delta \mathbf{J}[n]$ верхние строки матрицы A обеспечивают выполнение уравнения (1), средние и нижние – не меняют соответствующие

элементы вектора состояний. Коэффициент 0.999 обеспечивает стабилизируемость объекта (2).

В качестве матрицы B возьмём

$$B = \begin{pmatrix} C_2 \\ \tau I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{2,ik} = \left(\frac{\partial h_i[n]}{\partial I_p} \frac{\partial I_p[n]}{\partial J_k} \right) + \tau C_{1,ik},$$

$$i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, N_{coil}.$$

Верхняя группа строк матрицы B обеспечит в (2) выполнение уравнения (1) для $\mathbf{h}$. Средняя группа строк в (2) даст тождество с точностью $O(\tau^2)$, т.к.

$$\text{слева имеем } \tau \mathbf{J}[n], \text{ а справа } \tau \mathbf{J}[n-1] + \tau \delta \mathbf{J}[n] = \tau$$

$$(\mathbf{J}[n-1] + \mathbf{J}[n] - \mathbf{J}[n-1] + O(\tau^2)) = \tau \mathbf{J}[n] + O(\tau^3).$$

Нижняя группа строк приведёт в (2) к выражению

$$\tau \left(\frac{\partial \mathbf{h}[n+1]}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}[n+1]}{\partial I_p} \frac{\partial I_p[n+1]}{\partial t} \right) = \tau \left(\frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}[n]}{\partial I_p} \frac{\partial I_p[n]}{\partial t} \right), \quad (3)$$

которое означает сохранение при переходе на слой $n+1$ приращения величины в круглых скобках, связанной с явной зависимостью $\mathbf{h}$ и I_p от времени.

Рассмотренные матрицы A и B выделяют слабо зависящие от времени свойства объекта, вектор $\mathbf{x}$ – её динамическое состояние, вектор $\mathbf{u}$ – управление объектом. Процесс (2) описывает эволюцию объекта, при которой выполнено уравнение (1) и сохраняются приращения $\tau \mathbf{J}[n]$ и (3). Объект, эволюционирующий по уравнению (2), аппроксимирует поведение плазмы, выделяя некоторые её ключевые с точки зрения управления свойства.

Стандартным способом связь управления с вектором состояний для процесса (2) приводится к виду

$$\mathbf{u}[n] = -K[n]\mathbf{x}[n],$$

где K – матрица коэффициентов усиления размерности $N_{coil} \times 3N$.

Активное управление обычно осуществляется токами в полоидальных катушках $\mathbf{J}_{PFC}$ и в соленоиде $\mathbf{J}_{SOL}$: $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{PFC} + \mathbf{J}_{SOL}$. В токамаках токи $\mathbf{J}_{PFC} = \mathbf{J}_{PFC,1}, \dots, \mathbf{J}_{PFC,N_{PFC}}$ оказывают большее влияние на форму и положение плазмы, а $\mathbf{J}_{SOL} = \mathbf{J}_{SOL,1}, \dots, \mathbf{J}_{SOL,N_{SOL}}$ – на полный ток в плазме.

Для построения матриц A и B необходимо знать производные ошибки $\mathbf{h}$ по токам. Один из способов расчёта этих производных состоит в определении $\mathbf{h}(t, I_p(t, \mathbf{J}(t)), \mathbf{J}(t))$ для приращения только по одному из аргументов и вычисления разностного отношения. Однако такой способ подразумевает возможность приведения объекта в состояние с одним приращённым параметром, что и в реальности, и в численной модели может вызывать определённые трудности, например, реальный объект или его модель могут не существовать с приращением только по одному параметру. Кроме того, в численной модели требуется расчёт состояния объекта для каждого

приращения, что увеличивает время вычислений. Поэтому при определении производных желательно использовать другой подход, например, данные о состоянии объекта в предыдущие моменты времени.

Рассмотрим линеаризованную ошибку (1) на слое $n-1$. Имеем систему из N линейных алгебраических уравнений с $2NN_{coil}$ неизвестными $\partial \mathbf{h}[n-1]/\partial \mathbf{j}$, $\partial \mathbf{h}[n-1]/\partial \mathbf{J}$. Найдём их, экстраполируем по формуле Тейлора на момент времени n и построим искомые матрицы A и B .

Система для производных от $\mathbf{h}$ недоопределена. В принципе, она решается методом регуляризации. Однако можно уменьшить число неизвестных за счёт использовании априорных сведений об ошибке $\mathbf{h}$ и получить систему с прямоугольной матрицей.

Учтём, что управляющая катушка PFC оказывает большее влияние на ближайший к ней участок границы плазмы и будем контролировать положение границы в ближайшей к катушке точке. Также примем во внимание, что соленоид оказывает слабое влияние на положение границы. Тогда

$$\partial h_i[n-1]/\partial J_k = 0 \text{ при } i \neq k, i \leq N_{PFC}, k > N_{PFC}$$

Кроме того, вместо тока в каждом витке соленоида будем рассматривать полный ток в нём $\mathbf{J}_{SOL}$, $N_{SOL} = 1$ и учтём, что основной вклад в I_p даёт производная $\dot{\mathbf{J}}_{SOL}$.

$$\partial I_p[n-1]/\partial J_k = 0 \text{ при } k \leq N_{PFC}.$$

В $\mathbf{h}$ рассмотрим только отклонения от заданного положения границы и от заданного полного тока.

В результате остаётся $N = N_{PFC} + 1$ уравнений с $N_{PFC} + 1$ неизвестным.

Проблему задания начальных значений производных от $\mathbf{h}$ можно решать несколькими способами: с использованием априорных сведений; с помощью приращения по каждому аргументу $\mathbf{h}$ в отдельности; организацией подытераций, повторяя первый шаг до установления значений производных.

Алгоритмы управления только формой плазмы или только полным током в плазме строятся аналогично. В отсутствии управления токами в соленоиде $J_{SOL,i}$ эти токи должны быть заданы, а в отсутствии управления токами в полоидальных катушках необходимо задать $J_{PFC,i}$.

Построение контроллера LQR (Linear-Quadratic Regulator) для управления системой, описываемой уравнением (1), состоит в нахождении векторов состояния $\mathbf{x}[n]$ и управления $\mathbf{u}[n]$, которые минимизируют функционал

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^T[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]),$$

где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ – заданные матрицы размерностей $N \times N_{coil}$ и $3N \times N_{coil}$ соответственно. Выбор $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ обеспечивает компромисс между величиной погрешностей достижения желаемого состояния и величиной управлений.

На каждом относительно малом промежутке времени модель плазмы можно считать квазистационарной и свести поиск управления $\mathbf{u}[n]$ к поиску матрицы усиления $\mathbf{K}$ (см., например, [11-13])

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}[n] \mathbf{x}[n],$$

где

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A},$$

$\mathbf{P}$ – решение дискретного алгебраического уравнения Риккати (Discrete Algebraic Riccati Equation, DARE):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A},$$

Решение уравнения Риккати $\mathbf{P}$ также позволяет найти эффективность (performance index)

$$I_{\min} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T[0] \mathbf{P} \mathbf{x}[0],$$

Проблема существования и единственности решения задачи LQR-управления изучена, например, в [12, 13]. Методы решения уравнения Риккати представлены в [14-16].

Также применён контроллер H_{∞} , см., например, [11, 17, 13, 18, 19]. H_{∞} относится к так называемым робастным методам управления, которые обеспечивают хорошее качество управления в случаях, когда математическая модель объекта известна не очень точно или присутствуют возмущения.

Первичное построение и тестирование контроллеров удобно проводить с помощью известного пакета Matlab. Однако для автоматического управления плазмой с обратной связью в реальном времени необходимо использовать язык программирования, позволяющий предельно быстро строить контроллер и рассчитывать сигналы для исполнительных устройств. Быстрое построение контроллера и управлений реализовано на языке Fortran 2008. Программное обеспечение адаптировано для эффективной работы с высокой скоростью на гетерогенных мини-супер-ЭВМ НИИСИ РАН. Одна видеокарта GPGPU может дать ускорение до 100 раз, что особенно важно для решения задач в реальном времени.

Рис. 4 и 5 иллюстрируют применение аппаратно-программного комплекса моделирования и управления плазмой для параметров установок ITER www.itpa.ipp.mpg.de, близких к сценарию 2, и T-15 в некотором сценарии на основе данных из [20].

8. Графические интерфейсы пользователя

Разработка и изучение систем управления плазмой включает использование большого количества моделей, организацию больших потоков входных и выходных данных, проведение множества расчётов на распределённой вычислительной технике. Повышение производительности труда персонала и эффективности исследований требует удобных графических пользовательских интерфейсов, средств визуализации и анимации данных и процессов.

В рамках создания аппаратно-программного комплекса разрабатываются: среда VD (Virtual

Discharge) для оперирования вычислительными процессами, система мониторинга и визуализации расчётов VDSHell, интерфейс для автоматизации построения и визуализации ε -сетей, интерфейс для визуализации и изучения систем управления плазмой. Перечисленные системы кратко обсуждены ниже.

Среда VD – это интерактивный пользовательский интерфейс для описания, настройки, запуска и мониторинга вычислительных процессов. Объем программного обеспечения составляет более 20 тыс. строк на языке Java.

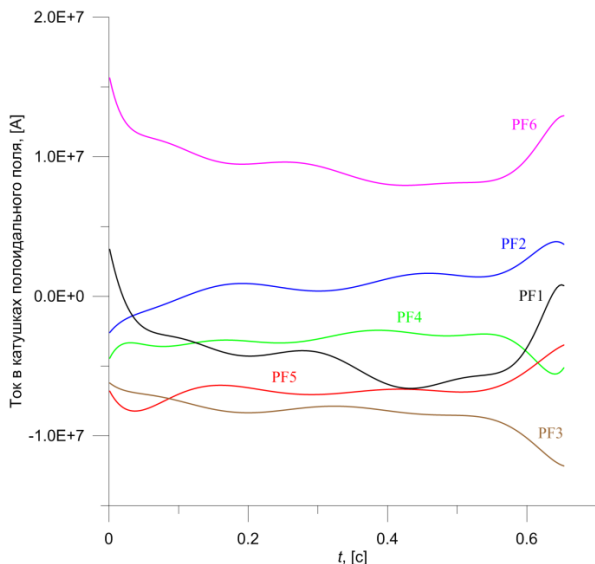


Рис. 4. Рассчитанные с помощью аппаратно-программного комплекса управляющие токи в полоидальных катушках установки ITER.

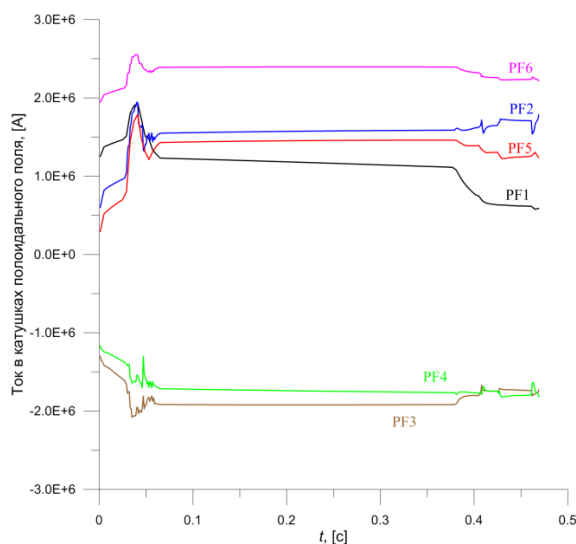


Рис. 5. То же в установке T-15.

В основе концепции среды VD лежит принцип Drag&Drop. Все операции по настройке вычислительной последовательности проводятся в интерактивном режиме с помощью графического конструктора без дополнительных рутинных операций, требующих ручной модификации программного кода. VD имеет интуитивно понятный пользователю графический интерфейс. Вычислительный процесс в

системе VD представляется с помощью направленного графа. Вершинами графа являются различные блоки, определяющие вычислительные процессы и их параметры. Ребра, соединяющие вершины, задают последовательность вычислений и способы обмена данными.

Развитые численные коды генерируют сотни и тысячи файлов с данными. Для построения графиков необходимо помнить смысл содержимого файлов, используемые единицы измерения, формат данных, создавать подписи к рисункам, осям координат, кривым и т.п. Для визуализации часто применяют универсальные графические пакеты общего назначения, многие из которых требуют специального, не всегда простого формата входных данных, задания множества настроек или даже написания программы на некотором внутреннем языке. Такие системы хороши для качественного построения единичных графиков, но малоприспособлены для мониторинга вычислений, особенно удалённых, быстрой группировки, фильтрации и визуализации большого множества функций.

Комплекс VDSHell автоматизирует решение указанных проблем, в том числе на распределённых системах. VDSHell создан на основе существенного развития разработанной авторами ранее системы SCoPEShell [2]. В зависимости от настройки VDSHell визуализация данных проводится с помощью одного из пакетов: GnuPlot, Scavis, XChart или Jzy3D.

Среда VD интегрирована с комплексом VDSHell.

Графический интерфейс пользователя для автоматизации построения и визуализации ε -сетей реализован на языке Java. Интерфейс даёт возможность экспериментировать с ε -сетями полиномов и сплайнов, подбирать наиболее пригодные для использования в коде SDSS классы функций.

Для визуализации решения задачи управления границей с обратной связью разработан графический интерфейс, позволяющий выбирать тип используемого для управления контроллера, отображать границу плазмы, линии уровня полоидального потока, токи в плазме, соленоиде, полоидальных катушках, погрешность расчёта границы плазмы и другие параметры.

Интерфейс даёт возможность просматривать анимацию эволюции плазмы. Фрагмент интерфейса приведён на рис. 6. Показано вертикальное сечение плазмы в плоскости (R, Z) . Точками с номерами отмечено положение полоидальных катушек. Тонкие кривые соответствуют линиям уровня ψ . Отклонения рассчитанной границы от желаемой определяются в точках на жирной кривой. Рассчитанная (синий цвет) и желаемая (зелёный) границы плазмы практически совпадают.

9. Заключение

С помощью гетерогенных мини-суперкомпьютеров НИИСИ РАН сделан существенный шаг в решении новых важных фундаментальных задач управления высокотемпературной плазмой тороидальной конфигурации. Разработаны и реализованы базовые компоненты аппаратно-программного комплекса мо-

делирования и автоматического управления плазмой в реальном масштабе времени с обратной связью.

В основе комплекса лежит принципиально новый, более точный и надёжный алгоритм управления, использующий решение с заданной точностью ряда обратных диагностических задач методом ε -сетей.

Разработаны и исследованы алгоритмы распараллеливания метода ε -сетей для CPU и гибридных архитектур CPU/GPGPU НИИСИ РАН с использованием технологий MPI, OpenCL и OpenMP.

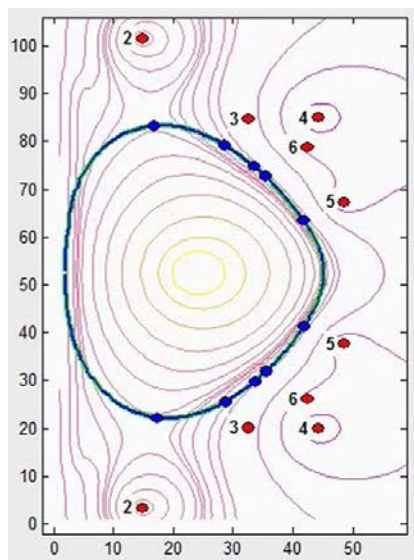


Рис. 6. Визуализация решения задачи управления. Вертикальное сечение токамака. Относительные единицы.

Продемонстрирована возможность использования параллельных методик для решения задач управления границей и внутренними параметрами плазмы в реальном масштабе времени с обратной связью для детальной обработки диагностических данных между разрядами. Невысокие цена и эксплуатационные расходы на содержание CPU/GPGPU-комплекса позволяют выделить его исключительно для решения задачи управления в реальном времени.

Показано, что аппаратно-программный комплекс применим к исследованию процессов в уже эксплуатируемых и вновь проектируемых термоядерных установках, к решению задач использования термоядерного синтеза для производства энергии.

Развитие программной инфраструктуры гетерогенных вычислений на базе стандарта OpenCL, а также перспективные гибридные супер-ЭВМ НИИСИ РАН нового поколения позволяют перейти к решению двумерных и трёхмерных задач диагностики плазмы, открывают возможности расширения класса применяемых в ε -сетях функций и повышения точности расчётов.

Исследования процессов управления плазмой, выполненные на суперкомпьютерах НИИСИ РАН с помощью аппаратно-программного комплекса, позволяют сформулировать следующие важные рекомендации по созданию систем управлений плазмой:

1. Для генерации сигналов исполнительным устройствам управления в реальном масштабе времени с обратной связью целесообразно применять данный аппаратно-программный комплекс и мини-суперкомпьютеры НИИСИ РАН. Разработанная методика построения систем управления плазмой представляет интерес для внедрения в качестве стандартной на установках ITER, T-15, Ignitor, JET, MAST, ASDEX.

2. Управление границей плазмы в реальном времени можно эффективно проводить на основе решения обратной задачи методом ε -сетей с использованием только данных магнитных измерений и сведений об особенностях конструкции установки.

3. Задача управления внутренними параметрами плазмы с обратной связью в реальном масштабе времени также может быть эффективно решена с использованием ε -сетей. Однако одной только магнитной диагностики, независимо от способа решения обратных задач, недостаточно для автоматического управления внутренними параметрами плазмы. Необходимо совместное использование данных различных диагностик: MSE (Motional Stark Effect), поляриметрии, интерферометрии и других измерений, дающих сведения о распределении тех или иных функций по магнитным поверхностям.

4. Сложность радиальных профилей различных величин в плазме реактора ITER требует детальной проработки каждого режима его функционирования с использованием предложенной здесь методики управления в комбинации с различными кодами, описывающими динамику плазмы в токамаке. Обычно применяемые полуэмпирические, сильно упрощённые подходы построения контроллеров приведут к объёмной дорогостоящей работе по экспериментальному подбору параметров систем управления в процессе ввода ITER в эксплуатацию и большому количеству преждевременных срывов разряда во время научно-исследовательских кампаний.

Завершение разработки аппаратно-программного комплекса создаст основу для решения задач управления следующего уровня сложности, таких как: формирование заданной начальной конфигурации плазмы при пробое газа; управление в критических ситуациях: подавление возникшей неустойчивости, предсказание и предотвращение несанкционированных срывов разряда, перегрева элементов конструкции вакуумной камеры, безопасное аварийное завершение разряда; повышение эффективности термоядерного энерговыделения и рентабельности электростанции.

Авторы статьи признательны директору НИИСИ РАН, академику РАН В.Б. Бетелину, зав. отделом НИИСИ РАН А.Г. Кушнirenко за поддержку исследований и полезные обсуждения, а также П.Б. Богданову за помощь в адаптации программного обеспечения для использования на гетерогенных вычислительных системах НИИСИ РАН.

Исследования поддержаны программами фундаментальных исследований Президиума РАН № 43 и № 17.

The basic hardware and software components of complex for the toroidal plasma modeling and control with epsilon nets on heterogeneous mini-supercomputers

F.S. Zaitsev, A.G. Shishkin, A.A. Lukianitsa,
E.P. Suchkov, S.V. Stepanov, F.A. Anikeev

Abstract. A significant step was made in addressing new and important fundamental problems of high-temperature toroidal plasma control. The basic hardware and software components of complex for modeling and automatic real-time feedback plasma control were developed and implemented. The complex is grounded on a brand new, more accurate and reliable control algorithm that uses the solution to a given accuracy by epsilon-nets of a number of inverse diagnostic problems. The possibility of applying the proposed method during discharge to provide feedback control of the plasma boundary and internal parameters was demonstrated. It is shown that the complex allows investigating processes in already exploited and newly designed thermo-nuclear devices and solving problems of using fusion for energy production. Recommendations for the engineering implementation of plasma control systems are worked out. Directions for further research are formulated.

Keywords: heterogeneous supercomputers, control, toroidal plasma, epsilon-nets.

Литература

1. F.S. Zaitsev, A.G. Shishkin, D.P. Kostomarov, M.R. O'Brien, R.J. Akers, M. Gryaznevich, A.B. Trefilov, A.S. Yelchaninov. The Numerical Solution of the Self-Consistent Evolution of Plasma Equilibria // *Comp. Phys. Comm.* 2004. V. 157/2. P. 107-120.
2. Ф.С. Зайцев. Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. 2-е издание. - М: МАКС Пресс, 2011, 640 с.
3. F.S. Zaitsev. Mathematical modeling of toroidal plasma evolution. English edition. - M.: MAKS Press, 2014, 688 pp.
4. ГVK НИИСИ OpenCL. <http://devgurus.amd.com/thread/159457>.
5. О.Ю. Сударева, П.Б. Богданов. Гетерогенное программирование в рамках стандарта OpenCL // XV Международная конференция "Супервычисления и математическое моделирование", 13-17 октября 2014. - Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014, с. 125-127.
6. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986. 288 с.
7. F.S. Zaitsev, D.P. Kostomarov, E.P. Suchkov, V.V. Drozdov, E.R. Solano, A. Murari, S. Matejcik, N.C. Hawkes and JET-EFDA Contributors // *Nucl. Fusion*. 2011. V. 51. 103044.
8. F.S. Zaitsev, S. Matejcik, A. Murari, E.P. Suchkov and JET-EFDA Contributors // *Fusion Sci. Technol.* 2012. V. 62. N 2. P. 366-373.
9. Д.П. Костомаров, Ф.С. Зайцев, Е.П. Сучков. Построение сильно различающихся решений некоторого класса некорректных задач с неточно заданными входными данными // *ДАН*. 2011, т. 437, N 3, с. 316-320.
10. Д.П. Костомаров, Ф.С. Зайцев, Е.П. Сучков, П.Б. Богданов. Решение обратных задач методом эpsilon-сетей на высокопроизводительных ЭВМ // *ДАН*. 2014, т. 455, N 5, с. 516-520.
11. S. Skogestad, I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analyses and Design*. - Chichester: John Wiley and Sons, 2000, 559 p.
12. K. Ogata. *Discrete-Time Control Systems*. - New Jersey, Englewood Cliffs: Prentice Hall International Inc., 1995, 744 p.
13. P. Lancaster, L. Rodman. *Algebraic Riccati equations*. - Oxford: Clarendon Press, 1995, 480 p.
14. A.J. Laub. A Schur Method for Solving Algebraic Riccati equations. - *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-24, p. 913-921, 1979.
15. W.M. Wonham. On a matrix Riccati equation of stochastic control // *SIAM J. Contr.*, 1968, 6, p. 681-697.
16. Sima, V. *Algorithms for Linear-Quadratic Optimization*. - Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks, vol. 200, Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

-
17. M. Green, D. Limebeer. Linear Robust Control. - Prentice Hall, 1994, 538 p.
 18. D. McFarlane, K. Glover. Robust Controller Design Using Normalised Coprime Factor Plant Descriptions. Springer-Verlag, 1990, 206 p.
 19. P.Hr. Petkov, D.W. Gu, and M.M. Konstantinov. Fortran 77 routines for Hinf and H2 design of linear discrete-time control systems. – Report 99-8, Department of Engineering, Leicester University, April 1999.
 20. E.A. Azizov, V.A. Belyakov, O.G. Filatov, E.P. Velikhov and T-15MD Team. Status of Project of Engineering-Physical Tokamak // 23rd International Atomic Energy Agency (IAEA) Fusion Energy Conf., Daejon, South Korea, 2010, FTP/P6-01.

Спектры локальных минимумов в спин-стекольных моделях

Б.В. Крыжановский¹, М.Ю. Мальсагов²

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,

E-mail's: ¹ kryzhanov@mail.ru, ² Magomed.Malsagov@gmail.com

Аннотация: Численным экспериментом исследованы спектры спиновых систем. Для моделей Шеррингтона-Киркпатрика и Эдвардса-Андерсона установлены основные спектральные характеристики: среднее значение глубины локального минимума, ширина спектра, глубина глобального минимума. На основании экспериментальных данных построены зависимости этих величин от размерности задачи N и получены их асимптотические значения в пределе $N \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: спектр, локальный минимум, глобальный минимум, спиновая система, спин-стекольная система, минимизация.

1. Введение

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию спектра локальных минимумов многоэкстремального квадратичного функционала, построенного на заданной $N \times N$ -матрице T_{ij} в N -мерном конфигурационном пространстве. Формально речь идет о спектре локальных минимумов спиновой системы, поведение которой описывается гамильтонианом:

$$H = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} s_i s_j, \quad (1)$$

заданным в конфигурационном пространстве состояний $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ с бинарными переменными $s_i = \pm 1$, $i = \overline{1, N}$. Здесь N – число спинов, а T_{ij} – симметричная матрица ($T_{ij} = T_{ji}$) с нулевой диагональю ($T_{ii} = 0$). Подчеркнем, что в выражении (1) отсутствует множитель $1/2$, обычно присутствующий в физических приложениях.

Для описания спектра системы удобнее пользоваться понятием глубины минимума, задаваемой выражением:

$$E = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} s_i s_j, \quad r = \left(N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Как будет видно далее, введенная в (2) нормировка достаточно универсальна, поскольку величина E практически не зависит от размерности задачи N . В этих обозначениях гамильтониан системы имеет вид $H = -rE$ и его зависимость от размерности сводится к выражению $H \sim N^{3/2}$.

Знание спектра локальных минимумов необходимо в самых разных областях науки. В информатике это знание необходимо для решения задач квадратичной минимизации [1–10], построения алгоритмов, связанных с отысканием глобального минимума [11–18] и оптимального разреза графа [19–26]. В нейроинформатике знание спектров необходимо

для построения систем ассоциативной памяти [27–33, 60–63], разработки нейронных сетей и разработки нейросетевых алгоритмов минимизации [34–40]. Наиболее востребованы эти знания в физике для исследования поведения спин-стекольных моделей [41–57] и даже для описания процессов четырех-фотонного смешения в нелинейных средах [58–59].

Вопрос о спектре локальных минимумов рассматривается на протяжении многих лет. Однако проблема до сих пор остается актуальной, поскольку нет однозначного ответа на поставленные вопросы. Действительно, наиболее часто цитируемые в литературе данные достаточно противоречивы. В частности, нет единого мнения как о форме спектра (ссылки см. в работе [41]), так и о глубине глобального минимума. Для иллюстрации, приведем данные для глубины глобального минимума, полученные разными методами:

$E_0 = 0$	TAP [45]
$E_0 = 2 / \sqrt{2\pi}$	mean random field [44]
$E_0 = 1.0$	partition function [41]
$E_0 = 4 / \pi$	replica [42]
$E_0 = 1.52 \sim 1.54$	Monte – Carlo [43]

Во-избежание недоразумений отметим, что из-за отсутствия в (1) множителя $1/2$ полученные нами значения глубины минимума будут в 2 раза больше аналогичных значений, имеющих в физической литературе. В частности, имеет место соотношение $E_0 = 2\varepsilon_0$, где ε_0 – введенное в [41] обозначение для глубины глобального минимума.

Как видим, данные из разных источников настолько сильно разнятся, что на них трудно опираться в своих расчетах. В связи с этим мы провели массивный эксперимент с тем, чтобы установить основные спектральные характеристики: среднее значение глубины локального минимума, ширина спектра, глубина глобального минимума. На основании экспериментальных данных мы построили зависимость этих величин от размерности задачи N и

получили асимптотические значения для случая $N \rightarrow \infty$.

Статья имеет следующую структуру. В секции 2 описана постановка эксперимента и проводится анализ экспериментальных данных. В секции 3 проводится обсуждение полученных результатов. В Приложении даны сводные таблицы экспериментальных данных для различных моделей.

2. Эксперимент

В ходе эксперимента исследовались спектры локальных минимумов на примере моделей Эдвардса-Андерсона (модель с сильно разреженными элементами матрицы T_{ij}) и Шеррингтона-Киркпатрика (модель с полностью связанной матрицей T_{ij}).

Для определения спектра использовался приведенный на рис.1 алгоритм минимизации. Мы привели вид этого хорошо известного алгоритма во избежание недоразумений, поскольку в литературе его называют по-разному: Монте-Карло, SRS (Standard Random Search), алгоритм Хопфилда, алгоритм локального поиска и т.д.

Algorithm SRS (Standard Random Search)

begin

Step 1. Random Initialization

Initialize configuration $S = (s_1, s_2, \dots, s_N)$, $s_i = \pm 1$ at random

Step 2. Descent over landscape H from S to minimum S_m :

calculate $h_i = \sum_j T_{ij} s_j$ for all $i = \overline{1, N}$

while there are unstable spins s_i ($h_i s_i < 0$)

for each spin s_i in S

if $h_i s_i < 0$ **then**

$s_i = -s_i$

refresh $h_i = h_i + 2T_{ij} s_j$ **for** all $i \neq j$

end if

end for

end while

calculate $E = E(S_m)$

End algorithm

Рис.1 Алгоритм локального поиска, использовавшийся для исследования спектра локальных минимумов спиновой системы.

Эксперимент проводился следующим образом. Для выбранной модели генерировалось 100 матриц. На каждой из матриц осуществлялось 10^6 случайных стартов, в ходе которых было найдено M локальных минимумов $E(i)$, $i = \overline{1, M}$ ($M \leq 10^6$, поскольку в некоторые минимумы система релаксировала более чем один раз). По набору значений $E(i)$, $i = \overline{1, M}$ строилась спектральная плотность $P(E)$, определялись их среднее E_m и стандартное отклонение σ , которое можно считать полушириной спектра:

$$E_m = M^{-1} \sum E(i), \quad \sigma^2 = M^{-1} \sum E(i)^2 - E_m^2. \quad (4)$$

Кроме того, фиксировался наиболее глубокий минимум E^* и глобальный минимум E_0 , если

вычислительные способности позволяли его определить.

Величины E_m , E^* , E_0 и σ флуктуируют от матрицы к матрице. Поэтому усреднением по всем 100 матрицам определялись их средние значения $\bar{E}_m$, $\bar{E}^*$, $\bar{E}_0$ и $\bar{\sigma}$, и величины флуктуаций δE_m , δE^* , δE_0 и $\delta \sigma$. Результаты экспериментов сведены в таблицы 2–5, приведенные в Приложении. В указанные таблицы добавлены усредненные значения глубины глобальных минимумов $\bar{E}_0$ и их флуктуаций $\delta \bar{E}_0$, для определения которых использовались более продвинутые алгоритмы, нацеленные на нахождение наиболее глубоких минимумов: MixMatrix-algorithm [18, 26], DDK-algorithm [16], GRA-algorithm [11] и Branch&Bound method [15].

На основании экспериментальных данных получены формулы, описывающие зависимости указанных величин от N . Формулы оптимизировались методом наименьших квадратов. Причем минимизировалась не разница между экспериментальными данными и формулой для каждого значения N , а величина относительной ошибки $\Delta = \Delta(N)$, вычисляемой как:

$$\Delta = \frac{\text{Experiment}(N) - \text{Formula}(N)}{\text{Experiment}(N)}.$$

Качество аппроксимирующих формул оценивается величиной достоверности, определяемой выражением:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (x_{\text{exp}} - x_{\text{approx}})^2}{\sum (x_{\text{exp}} - \bar{x}_{\text{exp}})^2}, \quad (5)$$

где x_{exp} – экспериментальные данные, $\bar{x}_{\text{exp}}$ – экспериментальное среднее, x_{approx} – величины, полученные по аппроксимирующей формуле.

1. SK модель. Это модель Шеррингтона-Киркпатрика для полностью связанной решетки, в которой спин взаимодействует со всеми остальными спинами; отличные от нуля матричные элементы подчинены нормальному распределению.

Данные эксперимента с этой моделью приведены в таблице 2. Анализ этих данных показывает, что величина $\bar{E}_m$ очень слабо (логарифмически) зависит от размерности N . Соответственно, эту величину мы аппроксимировали разложением в ряд по малой величине $1/\ln N$. Оказалось, что в разложении достаточно сохранить только первый член разложения. Полученные аппроксимационные выражения и соответствующие величины достоверности имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{E}_m &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{0.570}{\ln N} \right), & R^2 &= 0.994 \\ \delta E_m &= \frac{1}{8N^{0.629}}, & R^2 &= 0.986 \\ \bar{\sigma} &= \frac{1.128}{\sqrt{N}} \left(1 - \frac{1.995}{\ln N} \right), & R^2 &= 0.999 \\ \delta \sigma &= \frac{0.550}{N}, & R^2 &= 0.924 \end{aligned} \quad (6)$$

К сожалению, малое число значений величины $\bar{E}_0$ не позволяет построить аппроксимирующую формулу зависимости $\bar{E}_0 = \bar{E}_0(N)$ для этой модели.

Формулы (6) очень хорошо описывают спектральные характеристики модели. На рис. 2 показана зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$, идеально совпадающая с данными из таблицы 2. На рис. 3 приведена величина относительной ошибки, вычисляемой на основании формулы (6) и данных таблицы 2 в виде:

$$Err = 1 - \frac{\bar{E}_m(theor)}{\bar{E}_m(exper)}. \quad (7)$$

Как видим, величина относительной ошибки не превышает значения $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ при $N \sim 100$ и с ростом N быстро спадает до значения $\sim 2 \cdot 10^{-5}$ при $N \sim 10^4$.

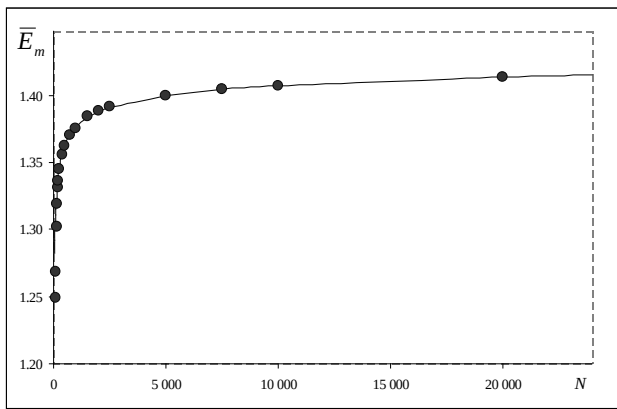


Рис. 2. SK модель. Зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$: кривая — формула (6), кружки — эксперимент.

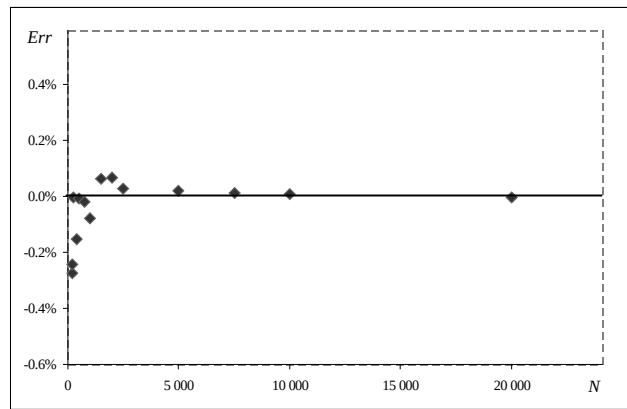


Рис. 3. SK модель. Величина относительной ошибки, вычисляемой по формулам (6) и (7).

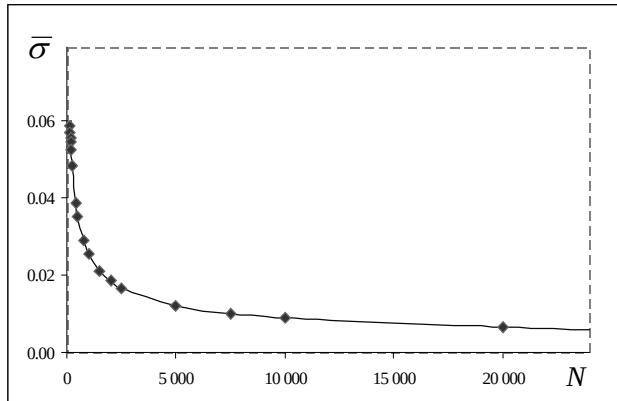


Рис. 4. SK модель. Зависимость полуширины спектра от размерности задачи $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(N)$. Сплошная кривая — формула (6), кружки — эксперимент.

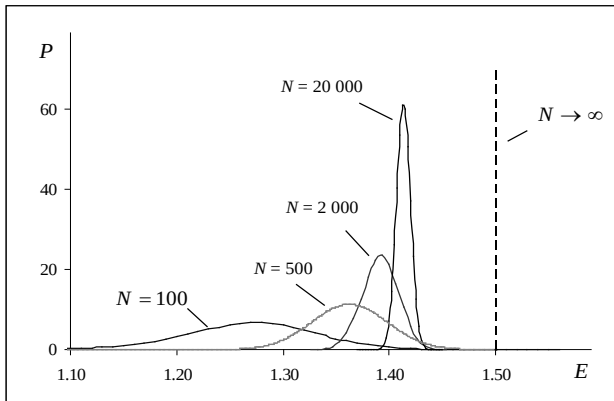


Рис. 5. SK модель. Спектральная плотность $P = P(E)$: с ростом N спектр сужается, а его центр сдвигается к значению $3/2$ (пунктир), соответствующему пределу $N \rightarrow \infty$.

Причем, при $N > 100$ разница между формулой и экспериментальными данными заведомо меньше величины флуктуации

$$|\bar{E}_m(theory) - \bar{E}_m(experiment)| \leq 0.2 \cdot \delta \bar{E}_m.$$

Зависимость полуширины спектра от N , задаваемая третьим из выражений (6), также отлично

описывает данные из таблицы 2: при $N \geq 200$ относительная ошибка меньше 1%, а разница между формулой и экспериментом меньше чем $0.4 \cdot \delta \sigma$. Характер зависимости $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(N)$ показан на рис. 4.

Как следует из (6) с ростом N среднее $\bar{E}_m$ стремится к величине $\bar{E}_m = 3/2$. Иными словами весь спектр сдвигается в глубокую сторону. При этом полуширина спектра быстро убывает как $\bar{\sigma} \sim N^{-0.456}$. Флуктуации медианы спектра и его полуширины, т.е. величины δE_m и $\delta \sigma$, с ростом N стремятся к нулю. Последнее означает, что при $N \rightarrow \infty$ спектры становятся очень устойчивыми, т.е. перестают изменяться от матрицы к матрице. На рис. 5 показано изменение вида спектра локальных минимумов в зависимости от величины N .

2. 3D EA модель. Это модель Эдвардса-Андерсона для трехмерной (кубической) решетки, в которой спин взаимодействует только с 6 ближайшими соседями; отличные от нуля матричные элементы подчинены нормальному распределению.

Данные эксперимента с этой моделью приведены в таблице 3, а аппроксимационные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_m &= 1.163 - \frac{0.0520}{\ln N}, \quad R^2 = 0.969 \\
\delta E_m &= \frac{0.2094}{N^{0.5151}}, \quad R^2 = 0.998 \\
\bar{\sigma} &= \frac{0.645}{\sqrt{N}} \left(1 + \frac{0.097}{\ln N} \right), \quad R^2 = 0.999 \\
\delta \sigma &= \frac{0.2863}{N^{0.9513}}, \quad R^2 = 0.992
\end{aligned} \tag{8}$$

Формулы (8) очень хорошо описывают спектральные характеристики модели. На рис. 6 показана описываемая (8) зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$, идеально совпадающая с данными из таблицы 3. На рис. 7 приведена величина относительной ошибки, вычисляемой выражением (7) на основании формулы (8) и данных таблицы 3. Как видим, величина относительной ошибки не превышает значения $\sim 2 \cdot 10^{-4}$ на всем диапазоне от $N = 5 \cdot 10^2$ до $N = 2.7 \cdot 10^4$. Причем, при $N > 100$ разница между формулой и экспериментальными данными заведомо меньше величины флуктуации

$$|\bar{E}_m(\text{theory}) - \bar{E}_m(\text{experiment})| \leq 0.1 \cdot \delta \bar{E}_m.$$

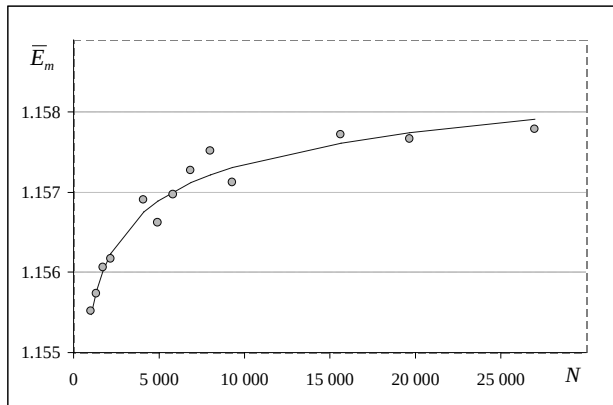


Рис. 6. Модель 3D EA. Зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$.
Сплошная кривая — формула (6), кружки — эксперимент.

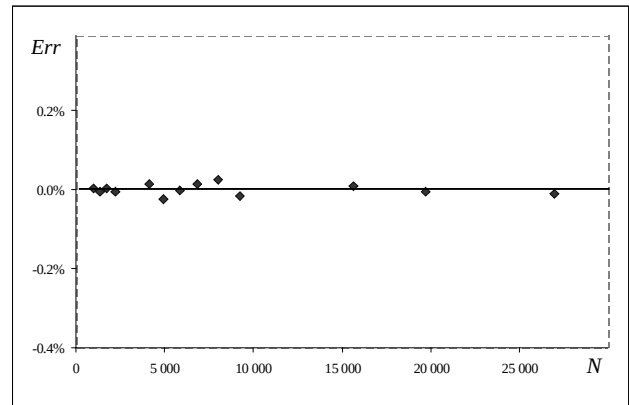


Рис. 7. Модель 3D EA. Величина относительной ошибки, вычисляемой по формулам (8) и (7).

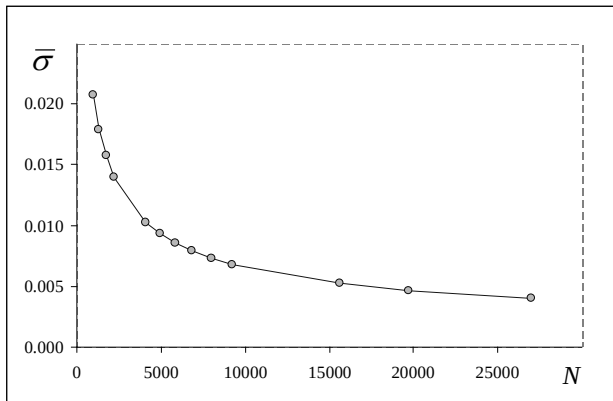


Рис. 8. Модель 3D EA. Зависимость полуширины спектра от размерности задачи. Сплошная кривая — формула (8), кружки — эксперимент.

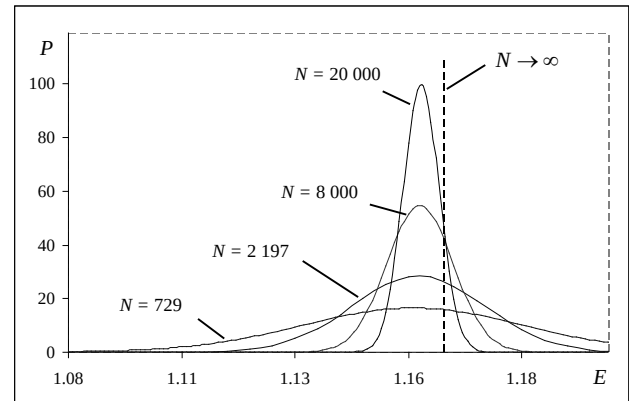


Рис. 9. Модель 3D EA. Спектральная плотность $P=P(E)$: с ростом N спектр сужается, а его центр слегка сдвигается к значению 1.163 (пунктир), соответствующему пределу $N \rightarrow \infty$.

Как следует из (8) с ростом N среднее $\bar{E}_m$ стремится к величине $\bar{E}_m(N \rightarrow \infty) = 1.163$. Иными словами весь спектр сдвигается в глубокую сторону. При этом полуширина спектра быстро убывает как $\bar{\sigma} \sim N^{-0.5019}$. Флуктуации медианы спектра и его полуширины, т.е. величины δE_m и $\delta \sigma$, с ростом N стремятся к нулю. Последнее означает, что при $N \rightarrow \infty$ спектры становятся очень устойчивыми, т.е. перестают изменяться от матрицы к матрице. На рис. 9 показано изменение вида спектра локальных минимумов в зависимости от величины N . В отличие от SK модели сдвиг спектра в глубокую сторону практически незаметен, заметно только сужение спектра с ростом N .

3. 2D EA модель. Это модель Эдвардса-Андерсона для двумерной решетки, в которой спин взаимодействует только с 4 ближайшими соседями; отличные от нуля матричные элементы подчинены нормальному распределению.

Данные эксперимента с этой моделью приведены в таблице 4. Аппроксимационные формулы, полученные анализом этих данных, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_m &= 1.101 - \frac{0.0188}{\ln N}, \quad R^2 = 0.965 \\
\delta E_m &= \frac{0.2559}{\sqrt{N}}, \quad R^2 = 0.945 \\
\bar{\sigma} &= \frac{0.567}{\sqrt{N}} \left(1 + \frac{0.04}{\ln N} \right), \quad R^2 = 0.994 \\
\delta\sigma &= \frac{0.5282}{N^{1.0264}}, \quad R^2 = 0.991 \\
\bar{E}_0 &= 1.3175 - \frac{0.0239}{\ln N}, \quad R^2 = 0.994
\end{aligned} \tag{9}$$

Сравнение с экспериментом показывает, что формулы (9) очень хорошо описывают спектральные характеристики модели. На рис. 10 показана описываемая (9) зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$, идеально совпадающая с данными из таблицы 4. На рис. 11 приведена величина относительной ошибки, вычисляемой выражением (7) на основании формулы (9) и данных таблицы 4. С ростом N величина относительной ошибки уменьшается от значения $Err \sim 8 \cdot 10^{-4}$ при $N = 10^2$ до $Err \sim 1.1 \cdot 10^{-4}$ при $N \sim 2 \cdot 10^4$. Причем, при $N \geq 100$ разница между формулой и экспериментальными данными заведомо меньше величины флуктуации

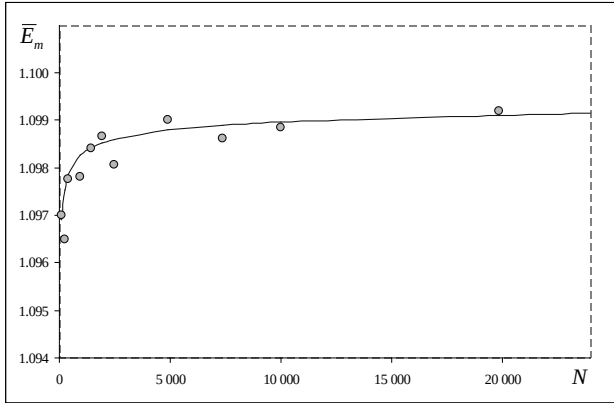


Рис.10. Модель 2D EA. Зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$.
Сплошная кривая – формула (9), кружки – эксперимент.

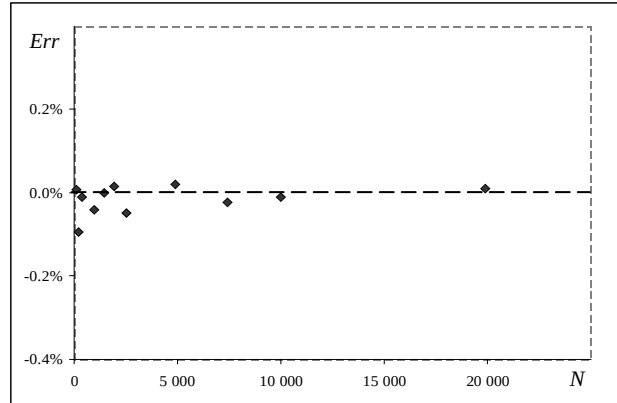


Рис.11. Модель 2D EA. Величина относительной ошибки, вычисляемой по формулам (9) и (7).

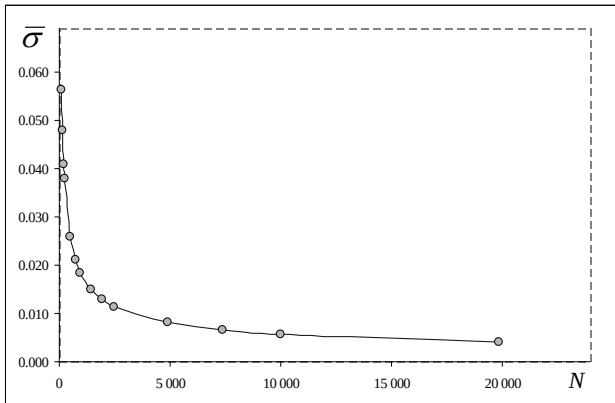


Рис. 12. Модель 2D EA. Зависимость полуширины спектра от размерности задачи. Сплошная кривая – формула (9), кружки – эксперимент.

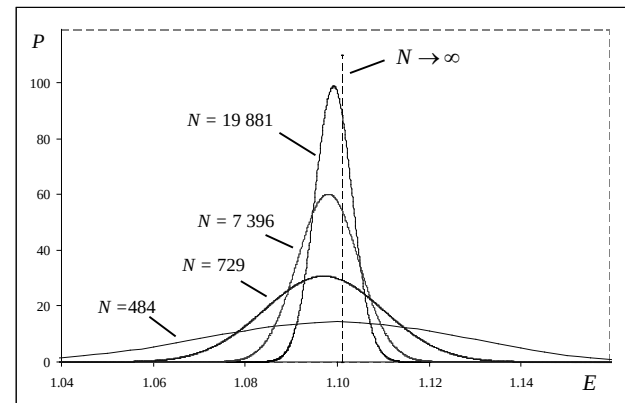


Рис. 13. Модель 2D EA. Спектральная плотность $P=P(E)$: с ростом N спектр сужается, а его центр очень слабо сдвигается к величине 1.0992 (пунктир), соответствующей пределу $N \rightarrow \infty$.

$$|\bar{E}_m(\text{theory}) - \bar{E}_m(\text{experiment})| \leq 0.1 \cdot \delta \bar{E}_m.$$

Зависимость полуширины спектра $\bar{\sigma}$ от N , задаваемая третьим из выражений (9), также отлично описывает данные из таблицы 4: при $N > 10^2$ относительная ошибка меньше 0.4%, а разница между формулой и экспериментом меньше чем $0.2 \cdot \delta\sigma$. Характер зависимости $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(N)$ показан на рис. 12.

Как следует из (9) с ростом N весь спектр сдвигается в глубокую сторону и среднее $\bar{E}_m$ стремится к асимптотическому пределу $\bar{E}_m(N \rightarrow \infty) = 1.101$. При этом полуширина спектра быстро убывает как $\bar{\sigma} \sim N^{-0.5013}$. Флуктуации медианы спектра и его полуширины, т.е. величины δE_m и $\delta\sigma$, с ростом N стремятся к нулю. Последнее означает, что при $N \rightarrow \infty$ спектры становятся очень устойчивыми, т.е. перестают изменяться от матрицы к матрице. На рис. 13 показано изменение вида спектра локальных минимумов в зависимости от величины N . Как видим, в данной модели сдвиг спектра в глубокую сторону практически незаметен, заметно только сужение спектра с ростом N .

Последнее из выражений (9) дает зависимость глубины глобального минимума E_0 от размерности

задачи. Это выражение дает нам асимптотику $E_0 \rightarrow 1.3175$ при $N \rightarrow \infty$.

4. SK* модель. В дополнение к рассмотренным выше моделям мы исследовали модель Шеррингтона-Киркпатрика для полносвязной решетки, в которой отличные от нуля матричные элементы подчинены равномерному распределению.

Данные эксперимента с этой моделью приведены в таблице 5. Аппроксимационные формулы, полученные анализом этих данных, имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{E}_m &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{0.571}{\ln N} \right), & R^2 &= 0.996 \\ \delta E_m &= \frac{1}{8N^{0.629}}, & R^2 &= 0.992 \\ \bar{\sigma} &= \frac{1.136}{\sqrt{N}} \left(1 - \frac{2.041}{\ln N} \right), & R^2 &= 0.998 \\ \delta \sigma &= \frac{0.550}{N}, & R^2 &= 0.970\end{aligned}\quad (10)$$

Сравнивая данные таблиц 2 и 5, а также

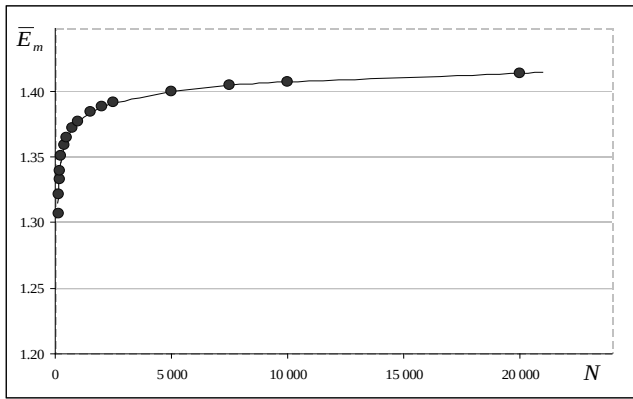


Рис. 14. SK* модель. Зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$: кривая – формула (10), кружки – эксперимент.

без излишних комментариев приведем аналогичные рисунки, описывающие поведение спектральных характеристик для этой модели: на рис. 14 показана описываемая (10) зависимость $\bar{E}_m = \bar{E}_m(N)$; на рис. 15 приведена величина относительной ошибки, вычисляемой выражением (7) на основании формулы (10) и данных таблицы 5; на рис. 16 показан характер зависимости $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(N)$; изменение вида спектра локальных минимумов в зависимости от величины N показано на рис. 17.

3. Обсуждение результатов

Анализ экспериментальных данных показал, что при достаточно большой размерности задачи ($N > 100$) спектральную плотность локальных минимумов $P(E)$ можно с большой точностью аппроксимировать нормальным распределением:

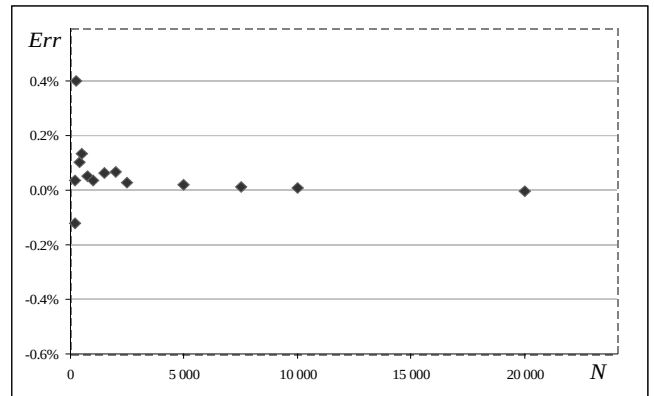


Рис. 15. SK* модель. Величина относительной ошибки, вычисляемой по формулам (10) и (7).

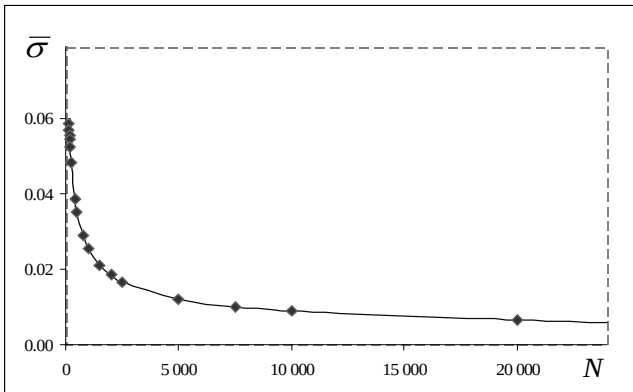


Рис. 16. SK* модель. Зависимость полуширины спектра от размерности задачи $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(N)$. Сплошная кривая – формула (10), кружки – эксперимент.

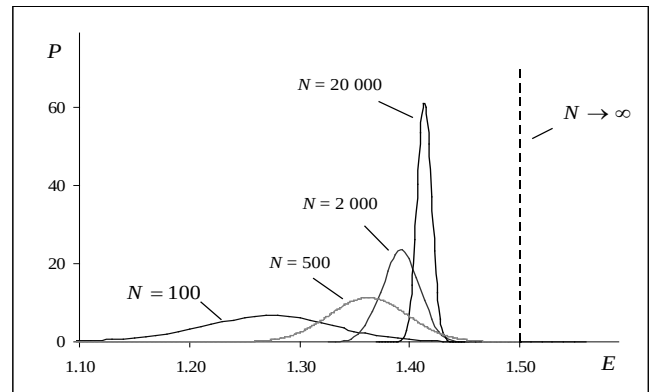


Рис. 17. SK* модель. Спектральная плотность $P = P(E)$: с ростом N спектр сужается, а его центр сдвигается к значению $3/2$ (пунктир), соответствующему пределу $N \rightarrow \infty$.

выражения (10) и (6), замечаем, что разница моделей SK и SK* минимальна: отличие в данных наблюдается только в третьем знаке после запятой. Выражения (10) так же хорошо описывают эксперимент для SK* модели, как и выражения (6) для модели SK. Поэтому

$$P(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{E - \bar{E}_m}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Для конкретного значения размерности N в это выражение следует подставить соответствующие

значения $\bar{E}_m$ и $\bar{\sigma}$ из таблиц 2–5 или их аппроксимирующие выражения из формул (6) – (10). Хорошее согласие выражения (11) и данных эксперимента видно на рис. 18–19, где в виде примера приведена спектральная плотность SK модели и 3D EA модели в случае $N = 2500$.

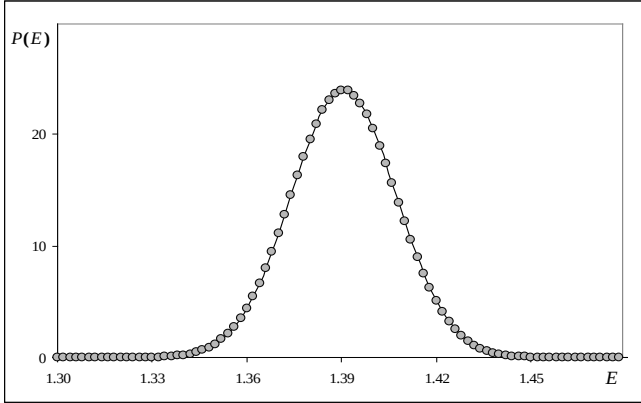


Рис.18. SK модель. Спектральная плотность $P(E)$ при $N = 2500$: кривая – формула (11), кружки – эксперимент.

Исследование четырех моделей позволило вывести эмпирические зависимости для основных характеристик спектра локальных минимумов, задаваемых выражениями (6) – (10). Нашей целью было получение выражений, которые с большой достоверностью описывали бы зависимость от N на всем диапазоне размерности задачи, который мы смогли исследовать, и на основании этой зависимости установить асимптотическое поведение характеристик спектра при $N \rightarrow \infty$. Очевидно, что к аппроксимации приведенных в таблицах 2–5 экспериментальных данных можно подойти по-разному и получить отличные от (6) – (10) выражения. Это обстоятельство не изменяет основной цели исследований: вне зависимости от вида получаемых аппроксимационных выражений они должны правильно описывать поведение характеристик на исследуемом диапазоне изменений величины N и давать достоверные асимптотики при $N \rightarrow \infty$. Асимптотические выражения для основных спектральных характеристик сведены в таблице 1.

Таблица 1. Асимптотические значения основных спектральных характеристик ($N \rightarrow \infty$).

	$\bar{E}_0$	$\bar{E}_m$	$\bar{\sigma}$
SK	$1.666 \pm 0.047^*$	1.500 ± 0.005	$1.128 / \sqrt{N}$
SK*	$1.666 \pm 0.047^*$	1.500 ± 0.005	$1.136 / \sqrt{N}$
3D EA	$1.375 \pm 0.026^*$	1.163 ± 0.002	$0.645 / \sqrt{N}$
2D EA	1.317 ± 0.005	1.101 ± 0.001	$0.567 / \sqrt{N}$

Обсудим приведенные в Таблице 1 данные. Сразу отметим, что асимптотические значения величин $\bar{E}_m$ и $\bar{\sigma}$ у нас не вызывают сомнений, поскольку

соответствующие им выражения (6) – (10) получены с очень большой достоверностью ($R^2 > 0.98$). Также не вызывает сомнений асимптотическое значение глубины глобального минимума $\bar{E}_0(N \rightarrow \infty) = 1.317$ для 2D EA модели.

Вызывающие сомнения значения отмечены звездочкой во второй колонке. Это асимптотические

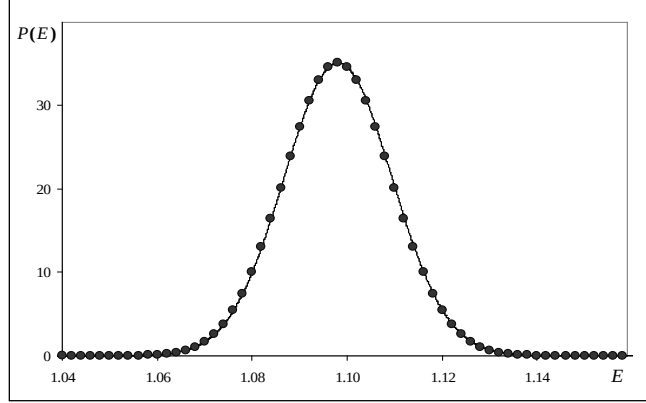


Рис.19. Модель 3D EA. Спектральная плотность $P(E)$ при $N = 2500$: кривая – формула (11), кружки – эксперимент.

значения глубины глобальных минимумов в моделях 3D EA, SK и SK*. Обсуждение начнем с модели 3D EA. Малое число значений для $\bar{E}_0$, имеющих в таблице 2 не позволяет удовлетворительно определить зависимость $\bar{E}_0 = \bar{E}_0(N)$, поскольку в поведении экспериментальных точек нет ярко выраженного монотонного асимптотического поведения при росте N . Это наглядно видно на рис. 20. Аналогичная ситуация имеет место и для моделей SK и SK*.

Отмеченные звездочкой асимптотические значения $\bar{E}_0(N \rightarrow \infty)$ получены следующим образом. Для каждого значения N вычислялось расстояние между $\bar{E}_m$ и $\bar{E}_0$:

$$\Delta_{m0} = 100\% \cdot \frac{\bar{E}_0 - \bar{E}_m}{\bar{E}_0}. \quad (12)$$

Было замечено, что эта величина практически не зависит от N , и при больших значениях N ее можно оценить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_{m0} &= 9.96\% \pm 2.5\%, \text{ SK и SK* модели} \\ \Delta_{m0} &= 15.61\% \pm 1.3\%, \text{ 3D EA модель} \\ \Delta_{m0} &= 16.45\% \pm 0.5\%, \text{ 2D EA модель} \end{aligned} \quad (13)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что последнее из выражений (13) прекрасно согласуется с асимптотическим выражением (9). Мы предположили, что при $N \rightarrow \infty$ выражение (13) остается справедливым также и для моделей 3D EA, SK и SK*. На основании имеющихся асимптотических значений $\bar{E}_m(N \rightarrow \infty)$ с учетом (13) были вычислены асимптотические значения $\bar{E}_0(N \rightarrow \infty)$, которые подставлены в таблицу 1.

Чтобы убедиться в том, что выражение (13) и величины из таблицы 1 не дают завышенные значения

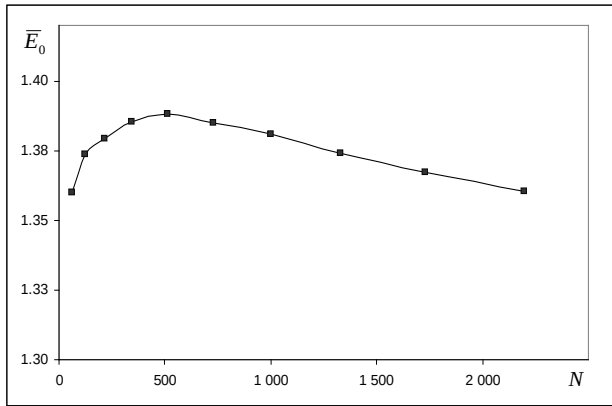


Рис.20. Модель 3D EA. Экспериментально установленная зависимость глубины глобального минимума E_0 от N .

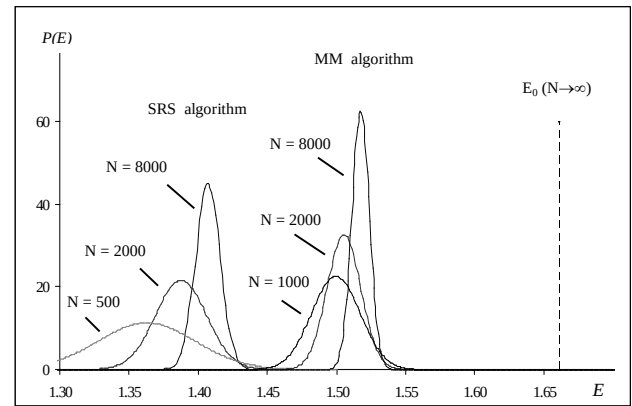


Рис.21. Модель SK. Левая группа кривых - спектральная плотность локальных минимумов $P(E)$, определенная алгоритмом SRS. Правая группа кривых - спектры локальных минимумов, найденных MM-алгоритмом. Пунктиром справа обозначено ожидаемое положение глобального минимума при $N \rightarrow \infty$.

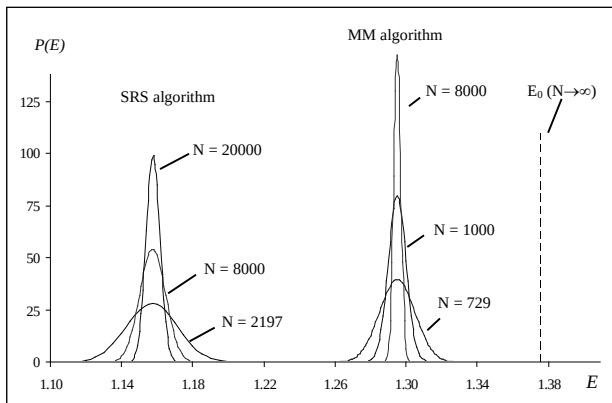


Рис.22. Модель 3D EA. Левая группа кривых - спектральная плотность локальных минимумов $P(E)$, определенная алгоритмом SRS. Правая группа кривых - спектры локальных минимумов, найденных MM-алгоритмом. Пунктиром справа обозначено ожидаемое положение глобального минимума при $N \rightarrow \infty$.

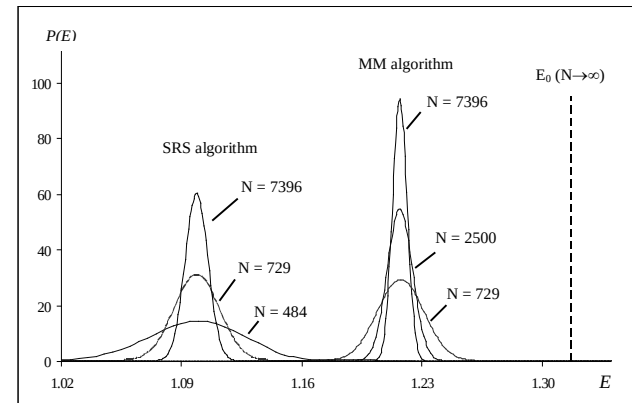


Рис.23. Модель 2D EA. Левая группа кривых - спектральная плотность локальных минимумов $P(E)$, определенная алгоритмом SRS. Правая группа кривых - спектры локальных минимумов, найденных MM-алгоритмом. Пунктиром справа обозначено ожидаемое положение глобального минимума при $N \rightarrow \infty$.

глубины глобального минимума, мы использовали MM-алгоритм [18, 26], позволяющий находить наиболее глубокие локальные минимумы (но не глобальные). Характерный вид спектров локальных минимумов, находимых этим алгоритмом для моделей 2D EA, 3D EA и SK представлены на рисунках 21–23 (спектры для модели SK* имеют аналогичный SK вид, поэтому мы их не воспроизводим). Как видим, имеется огромное число локальных минимумов, глубина которых явно больше соответствующей величины $\bar{E}_m$, но меньше значений $\bar{E}_0$, даваемых выражением (13). Иными словами, эксперимент с MM-алгоритмом позволил убедиться в соответствующих неравенствах:

$$\begin{aligned} \bar{E}_0 &> 1.500, \text{ для SK и SK* моделей} \\ \bar{E}_0 &> 1.296, \text{ для 3D EA модели} \\ \bar{E}_0 &> 1.218, \text{ для 2D EA модели} \end{aligned} \quad (14)$$

В заключение отметим, что глубины глобальных минимумов, задаваемые Таблицей 1, явно больше приведенных в (3) значений. Наибольшее из этих значений $E_0 = 1.50 \sim 1.54$, полученное Киркпатриком и Шеррингтоном в работе [43] методом Монте-Карло, близко полученной нами величине среднего $\bar{E}_m$ для SK модели. Скорее всего, авторы этой работы принимали за глобальный минимум наиболее глубокий локальный минимум, находимый методом Монте-Карло (то же самое, что и алгоритм SRS).

Авторы выражают благодарность Я.М. Карандашеву за помощь в осуществлении ряда экспериментов с применением MM-алгоритма.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 15-07-04861.

Local minima spectrum in spin-glass models

B.V. Kryzhanovsky, M.Yu. Malsagov

Abstract: In computational experiments, we investigate the energy spectrum of spin systems. For Sherrington-Kirkpatrick and Edwards-Anderson models, we have found the main spectral characteristics such as the mean value of energy of local minima, the spectrum width, and the energy of the global minimum. Based on experimental data, we have estimated the dependencies of these quantities on the system dimensionality N and obtained their asymptotic values at $N \rightarrow \infty$.

Keywords: spectrum, local minimum, global minimum, spin system, spin-glass model, minimization.

Литература

1. J.J. Hopfield, D.W. Tank. Neural computation of decisions in optimization problems. // *Biological Cybernetics*, vol.52, pp.141-152 (1985); J.J.Hopfield, D.W.Tank. Computing with neural circuits: A Model. *Science*, vol. 233, pp.625-633 (1986).
2. Y. Fu, P.W. Anderson. Application of statistical mechanics to NP-complete problems in combinatorial optimization. // *Journal of Physics A.*, vol.19, pp.1605-1620 (1986).
3. W. Duch, J. Korczak. Optimization and global minimization methods suitable for neural networks. KMK UMK Technical Report 1/99; *Neural Computing Surveys* (1998). <http://www.is.umk.pl/~duch/cv/papall.html>
4. F. Wu and P.K.S. Tam. A neural network methodology of quadratic optimization. // *International Journal of Neural Systems*, vol. 9, No. 2 87-93 (1999).
5. A. Hartmann. Calculation of ground states of four-dimensional +/-J Ising spin glasses. // *Physical Review B* v.60, pp.5135-5138 (1999).
6. A.K. Hartmann, H. Rieger. *Optimization Algorithms in Physics*. Wiley-VCH, Berlin (2001)
7. Boris Kryzhanovsky, Vladimir Kryzhanovsky. Binary optimization: On the probability of a local minimum detection in random search. *Artificial Intelligence and Soft Computing – ICAISC 2008. Lecture Notes in Computer Science*, LNAI 5097/2008, pp.89-100.
8. *New Optimization Algorithms in Physics*. A.K. Hartmann and H. Rieger (Eds.), Wiley-VCH, Berlin (2004)
9. B.V. Kryzhanovsky, V.M. Kryzhanovsky. The shape of a local minimum and the probability of its detection in random search. *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Filipe, Joaquim; Ferrier, Jean-Louis; Andrade-Cetto, Juan (Eds.) Vol. 24, pp.51-61 (2009).
10. L.B. Litinskii. Eigenvalue problem approach to discrete minimization. // W.Duch et al. (Eds.): *ICANN 2005, LNCS 3697*, pp. 405-410, 2005.
11. J. Houdayer, O.C. Martin. Hierarchical approach for computing spin glass ground states. *Phys.Rev E*, V. 64, 056704 (2001)
12. L.B. Litinskii, B.M. Magomedov. Global Minimization of a Quadratic Functional: Neural Networks Approach.// *Pattern Recognition and Image Analysis* v. 15(1), pp. 80-82 (2005).
13. Y.M. Karandashev, B.V. Kryzhanovsky. Transformation of Energy Landscape in the Problem of Binary Minimization. *Doklady Mathematics*, v.80, No.3, pp.927-931 (2009).
14. Y.M. Karandashev, B.V. Kryzhanovsky. Binary optimization: efficient increasing of global minimum basin of attraction. *Optical Memory & Neural Networks (Information Optics)*, v. 19, no. 2, pp. 110-125 (2010)
15. F. Liers, M. Junger, G. Reinelt, and G. Rinaldi. Computing Exact Ground States of Hard Ising Spin Glass Problems by Branch-and-Cut. Published in: *New Optimization Algorithms in Physics*. Wiley 2004, pp. 47-68 (2004).
16. I. Karandashev, B. Kryzhanovsky. Increasing the attraction area of the global minimum in the binary optimization problem. *Journal of Global Optimization*, Vol. 56 (3), pp. 1167-1185 (2013)
17. I.M. Karandashev, B.V. Kryzhanovsky. Attraction Area of Minima in Quadratic Binary Optimization. *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*, vol.23 , No.2, pp.84-88, 2014.
18. I.M. Karandashev and B.V. Kryzhanovsky. Matrix Transformation Method in Quadratic Binary Optimization. *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*, vol.24 , No.2, pp.67-81, 2015.
19. M.X. Goemans and D.P. Williamson, .878-approximation Algorithms for MAXCUT and MAX2SAT. *ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)* (1994).
20. M. Bellare, O. Goldreich and M. Sudan. Free Bits, PCPs and Non-approximability. *Towards Tight on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society 422-431 (1995)
21. F. Rendl, G. Rinaldi, and A. Wiegele. Solving Max-Cut to Optimality by Intersecting Semidefinite and Polyhedral Relaxations. *Math. Programming*, v. 121, no. 2, p. 307 (2010).
22. A. Wiegele: *Nonlinear Optimization Techniques Applied to Combinatorial Optimization Problems*. Dissertation. , Oktober 2006, i-x, pp. 1-131.

23. New Optimization Algorithms in Physics. A.K. Hartmann and H. Rieger (Eds.), Wiley-VCH, Berlin (2004)
24. R. Marti , A. Duarte, M. Laguna. Advanced Scatter Search for the Max-Cut Problem. *INFORMS Journal on Computing* v.01, n.21, pp. 26-38 (2009).
25. S. Burer, R.D.C. Monteiro, Y. Zhang. Rank-Two Relaxation Heuristics for Max-Cut and Other Binary Quadratic Programs. *SIAM Journal on Optimization*, v.12, pp.503-521 (2000)
26. Iakov Karandashev and Boris Kryzhanovsky. Mix-Matrix Transformation Method for Max-Cut Problem. *ICANN, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 8681, p.323 (2014).
27. J.J. Hopfield. Neural Networks and physical systems with emergent collective computational abilities. // *Proc.Nat.Acad.Sci.USA*. vol.79, pp.2554-2558 (1982).
28. T. Poggio, F. Girosi. Regularization algorithms for learning that are equivalent to multilayer networks. // *Science* 247, pp.978-982 (1990).
29. G. Pinkas, R. Dechter. Improving Connectionist Energy Minimization. // *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol.3 (1995), pp.23-48 (1995).
30. S. Mulder and D. Wunsch II. A Million City Traveling Salesman Problem Solution by Divide and Conquer Clustering and Adaptive Resonance Neural Networks. // *Neural Networks* vol.16, No.5-6, pp.827-832 (2003).
31. B.V. Kryzhanovsky, B.M. Magomedov, A.L. Mikaelyan. A Relation Between the Depth of a Local Minimum and the Probability of Its Detection in the Generalized Hopfield Model . *Doklady Mathematics*, vol.72, N3, pp. 986-990 (2005).
32. K.A. Smith. Neural Networks for Combinatorial Optimization: A Review of More Than a Decade of Research. // *INFORMS Journal on Computing* v.11 (1), pp.15-34 (1999).
33. B.V. Kryzhanovsky, V.M. Kryzhanovsky, A.L. Mikaelian and A. Fonarev. Parametric dynamic neural network recognition power. *Optical Memory&Neural Network*, Vol. 10, №4, pp.211-218 (2001).
34. G. Joya, M. Atencia and F. Sandoval. Hopfield Neural Networks for Optimization: Study of the Different Dynamics.// *Neurocomputing*, v.43(1-4), pp. 219-237 (2002).
35. B.V. Kryzhanovsky, L.B. Litinskii, A.L. Mikaelian. Vector-neuron models of associative memory. *Proc. of Int. Joint Conference on Neural Networks IJCNN-2004*, , pp.909-1004 (2004).
36. B.V. Kryzhanovsky, L.B. Litinskii and A. Fonarev. Parametrical neural network based on the four-wave mixing process. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A*. vol 502, No.2-3, pp. 517 - 519 (2003).
37. B.V. Kryzhanovsky, A.L. Mikaelian and A.B. Fonarev. Vector neural net identifying many strongly distorted and correlated patterns. *Int. conf on Information Optics and Photonics Technology, Photonics Asia-2004, Beijing-2004*. *Proc. of SPIE*, vol. 5642, pp. 124-133.
38. B.V. Kryzhanovsky, V.M. Kryzhanovsky, A.B. Fonarev. Decorrelating Parametrical Neural Network. *Proc. of IJCNN Montreal-2005*, pp.1023-1026.
39. B.V. Kryzhanovsky. Expansion of a matrix in terms of external products of configuration vectors. *Optical Memory & Neural Networks*, vol. 17, No. 1, pp. 62-68 (2008).
40. Iakov Karandashev, Boris Kryzhanovsky and Leonid Litinskii. Weighted patterns as a tool to improve the Hopfield model. // *Physical Review E* 85, 041925 (2012) .
41. F. Tanaka, S.F. Adwards. Analytic theory of the ground state properties of a spin glass. I. Ising spin glass. *J.Phys.F: Metal Phys.* 10, 2769-78 (1980).
42. D. Sherrington and S.Kirkpatrick. Solvable Model of a Spin-Glass. *Phys. Rev. Lett.* 35, 1792-6 (1975).
43. S. Kirkpatrick, D. Sherrington. Infinite-ranged models of spin-glasses. *Phys. Rev. B* 17, 4384 (1978).
44. M.W. Klein. *Phys. Rev. B* 14, 5018-17 (1976).
45. D.J. Thouless, P.W. Anderson and R.G. Palmer. Solution of solvable model of a spin glass. *Phil.Mag.* 35, 593-601 (1977).
46. D.J. Amit, H. Gutfreund, H. Sompolinsky. Spin-glass models of neural networks. *Phys. Rev. A*, vol.32, pp.1007-1018 (1985); *Annals of Physics*, vol.173, pp.30-67 (1987).
47. N.S. Ananikian, A.R. Avakian, N.S. Izmailian. Phase diagrams and tricritical effects in the BEG model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 172 (3), 391-404 (1991).
48. D. Bolle, P. Dupont and J. Huyghebaert. Thermodynamic properties of the Q-state Potts-glass neural network. *Phys. Rev. A* 45 (6), 4194-4197 (1992).
49. S. Boettcher. Extremal Optimization for Sherrington-Kirkpatrick Spin Glasses. // *Eur. Phys. Journal B*. 46, pp. 501 (2005).
50. H. Horner. Time dependent local field distribution and metastable states in the SK-spin-glass. *Eur. Phys. J B -- Condensed Matter*; Vol. 60 (4), p.413 (2007).
51. V.V. Hovhannisyanyan, N.S. Ananikian. Antiferromagnetic model and magnetization plateaus on the zigzag ladder with two- and three-site exchanges. *Physics Letters A* 372, 3363-3368 (2008).
52. N.S. Ananikian, L.N. Ananikyan, L.A. Chakhmakhchyan, O. Rojas. Thermal entanglement of a spin-1/2 Ising-Heisenberg model on a symmetrical diamond chain. *J. of Physics: Condensed Matter* 24 (25), 256001 (2012).
53. Boris Kryzhanovsky and Leonid Litinskii. Approximate method of free energy calculation for spin system with arbitrary connection matrix. *J. Phys.: Conf. Ser.* 574, 012017 (2015).
54. B. Kryzhanovsky, L. Litinskii. Generalized Bragg-Williams equation for system with an arbitrary long-range interaction. *Doklady Mathematics*, Vol. 90, No. 3, pp. 784-787 (2014).
55. Boris Kryzhanovsky and Leonid Litinskii. Generalized approach to energy distribution of spin system. *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*, vol.24, No.3, pp.165-185 (2015).

56. B. Kryzhanovsky, L. Litinskii. Approximate method of free energy calculation for spin system with arbitrary connection matrix. ArXiv 1410.6696 (2015)

57. Boris Kryzhanovsky and Leonid Litinskii. Approximate method of free energy calculation for spin system with arbitrary connection matrix. International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences IC-MSQUARE - 2014, Madrid, Spain.

58. B.V. Kryzhanovsky, A.R. Karapetyan, B.A. Glushko. Theory of energy exchange and conversion via four-wave mixing in a nondissipative $\chi(3)$ material. Physical Review A 44, №9, 6036-6042 (1991).

59. B.V. Kryzhanovsky, A.O. Melikyan. The effects of intensity in resonance fluorescence. Optics Commun. 29, №2, 164 (1979).

60. V. Kryzhanovsky, M. Malsagov, J. A. C. Tomas. Hierarchical classifier: based on neural networks searching tree with iterative traversal and stop criterion. // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics).– 2013.– Vol. 22, №4.– pp. 217–223.

61. В.М. Крыжановский, М.Ю. Мальсагов, И.С. Желавская. Поиск ближайшего соседа в бинарном пространстве большой размерности с помощью нейросетевого бинарного дерева // Вестник Компьютерных и Информационных Технологий. №10. 2014.

62. В.М. Крыжановский, М.Ю. Мальсагов, И.С. Желавская. Двухслойный векторный персептрон для решения задачи распознавания бинарных образов. // Программные продукты и системы. №4. 2014. сс. 70 – 77.

63. Vladimir Kryzhanovsky, Magomed Malsagov, Irina Zhelavskaya. Error Probability of Search in High-Dimensional Binary Space by Scalar Neural Network Tree // Proc. of 8th International Conference on Bio-inspired Information and Communications Technologies. Boston. Massachusetts. USA. 1-3 December 2014.

Приложение. Таблицы экспериментальных данных.

Прочерки в таблицах означают, что для этих значений N мы не смогли найти глобальный минимум.

Таблица 2. Характеристики спектра локальных минимумов SK модели.

N	$\bar{E}_0$	$\delta\bar{E}_0$	$\bar{E}^*$	δE^*	$\bar{E}_m$	δE_m	$\bar{\sigma}$	$\delta\sigma$
100	1.47200	0.03800	1.46326	0.03038	1.26848	0.01772	0.05867	0.00493
125	1.48020	0.03404	1.47324	0.02732	1.30172	0.01469	0.05699	0.00416
150	1.48600	0.03070	1.47672	0.02650	1.31937	0.01293	0.05539	0.00462
175	1.49101	0.02701	1.48549	0.02271	1.33137	0.01285	0.05438	0.00389
200	1.49600	0.02400	1.48695	0.02162	1.33591	0.01303	0.05254	0.00425
250	1.50002	0.02050	1.49271	0.01736	1.34556	0.01183	0.04834	0.00388
400	1.50650	0.01500	1.49354	0.01393	1.35563	0.00692	0.03866	0.00197
500	1.51000	0.01200	1.49461	0.01232	1.36268	0.00658	0.03532	0.00157
750	-	-	1.48520	0.01056	1.37088	0.00369	0.02910	0.00085
1 000	-	-	1.47808	0.00728	1.37544	0.00301	0.02539	0.00066
1 500	-	-	1.46922	0.00560	1.38307	0.00202	0.02112	0.00037
2 000	-	-	1.46393	0.00495	1.38758	0.00163	0.01848	0.00023
2 500	-	-	1.45727	0.00484	1.39065	0.00134	0.01664	0.00018
5 000	-	-	1.44347	0.00327	1.39948	0.00065	0.01212	0.00012
7 500	-	-	1.44300	0.00253	1.40417	0.00046	0.01008	0.00006
10 000	-	-	1.44061	0.00230	1.40711	0.00038	0.00884	0.00005
20 000			1.43316	0.00207	1.41347	0.00025	0.00647	0.00012

Таблица 3. Характеристики спектра локальных минимумов 3D EA модели.

N	$\bar{E}_0$	$\delta\bar{E}_0$	$\bar{E}^*$	δE^*	$\bar{E}_m$	δE_m	$\bar{\sigma}$	$\delta\sigma$
64	1.36755	0.03589	1.35987	0.03589	1.06213	0.01367	0.07127	0.00438
125	1.43043	0.02462	1.37127	0.02595	1.14979	0.01595	0.05847	0.00350
216	1.38585	0.01643	1.34652	0.01888	1.15344	0.01251	0.04463	0.00176
343	1.40548	0.01487	1.31689	0.01732	1.15394	0.01049	0.03562	0.00107
729	1.36912	0.01199	1.27034	0.01119	1.15599	0.00746	0.02434	0.00060
1 000	1.38104	0.01381	1.24429	0.00927	1.15552	0.00611	0.02071	0.00044
1 331	1.37105	0.01371	1.23313	0.00838	1.15573	0.00505	0.01790	0.00031

1 728	1.36695	0.01234	1.22430	0.00719	1.15606	0.00447	0.01574	0.00024
2 197	1.36023	0.01231	1.21611	0.00570	1.15617	0.00400	0.01396	0.00019
4 096	-	-	1.20120	0.00421	1.15690	0.00282	0.01019	0.00010
4 913	-	-	1.19718	0.00407	1.15718	0.00278	0.00932	0.00010
5 832	-	-	1.19472	0.00369	1.15696	0.00246	0.00855	0.00008
6 859	-	-	1.19148	0.00322	1.15714	0.00222	0.00787	0.00006
8 000	-	-	1.18926	0.00294	1.15751	0.00220	0.00729	0.00005
9 261	-	-	1.18662	0.00275	1.15705	0.00194	0.00677	0.00004
15 625	-	-	1.18022	0.00198	1.15772	0.00140	0.00521	0.00003
19 683	-	-	1.17797	0.00200	1.15767	0.00130	0.00464	0.00002
27 000	-	-	1.17523	0.00166	1.15779	0.00108	0.00396	0.00002

Таблица 4. Характеристики спектра локальных минимумов 2D EA модели.

N	$\bar{E}_0$	$\delta\bar{E}_0$	$\bar{E}^*$	δE^*	$\bar{E}_m$	δE_m	$\bar{\sigma}$	$\delta\sigma$
100	1.31051	0.02783	1.30758	0.02901	1.09434	0.02148	0.05628	0.00380
144	1.31570	0.02563	1.29445	0.02707	1.09771	0.02187	0.04793	0.00302
196	1.31306	0.02444	1.27072	0.02686	1.09539	0.01947	0.04093	0.00243
225	1.31098	0.01981	1.26032	0.02302	1.09581	0.01694	0.03787	0.00179
484	1.31271	0.01465	1.21282	0.01482	1.09624	0.01100	0.02583	0.00092
729	1.31497	0.01179	1.19602	0.01230	1.09873	0.01006	0.02110	0.00070
961	1.31667	0.01054	1.18477	0.01090	1.09883	0.00880	0.01847	0.00043
1 444	1.31554	0.00915	1.16872	0.00901	1.09840	0.00763	0.01501	0.00033
1 936	1.31475	0.00699	1.15977	0.00615	1.09867	0.00521	0.01294	0.00023
2 500	1.31449	0.00589	1.15212	0.00517	1.09807	0.00417	0.01139	0.00017
4 900	1.31601	0.00453	1.13843	0.00432	1.09947	0.00367	0.00816	0.00009
7 396	1.31486	0.00349	1.13042	0.00339	1.09862	0.00286	0.00663	0.00006
10 000	1.31465	0.00318	1.12606	0.00303	1.09884	0.00259	0.00569	0.00004
19 881	-	-	1.11878	0.00204	1.09920	0.00186	0.00404	0.00002

Таблица 5. Характеристики спектра локальных минимумов SK* модели.

N	$\bar{E}_0$	$\delta\bar{E}_0$	$\bar{E}^*$	δE^*	$\bar{E}_m$	δE_m	$\bar{\sigma}$	$\delta\sigma$
100	1.47250	0.03803	-1.46949	0.03386	-1.27311	0.01521	0.05902	0.00576
125	1.48023	0.03405	-1.47497	0.02804	-1.30680	0.01533	0.05606	0.00427
150	1.48610	0.03075	-1.47911	0.02634	-1.32169	0.01431	0.05496	0.00453
175	1.49100	0.02700	-1.48670	0.02109	-1.33338	0.01144	0.05396	0.00392
200	1.495800	0.02450	-1.48883	0.01772	-1.33963	0.01388	0.05251	0.00378
250	1.50010	0.02052	-1.49767	0.01802	-1.35104	0.01216	0.04846	0.00322
400	1.50640	0.01501	-1.49698	0.01267	-1.35906	0.00700	0.03889	0.00196
500	1.51002	0.01203	-1.49518	0.01267	-1.36463	0.00573	0.03528	0.00148
750	-	-	-1.48573	0.01113	-1.37185	0.00396	0.02900	0.00087
1 000	-	-	-1.47928	0.00824	-1.37700	0.00308	0.02546	0.00056
1 500	-	-	-1.47087	0.00717	-1.38421	0.00201	0.02110	0.00033
2 000	-	-	-1.46523	0.00558	-1.38868	0.00163	0.01849	0.00025
2 500	-	-	-1.45811	0.00458	-1.39131	0.00138	0.01662	0.00019
5 000	-	-	-1.44488	0.00333	-1.40006	0.00076	0.01211	0.00011
7 500	-	-	-1.44296	0.00272	-1.40449	0.00045	0.01007	0.00006
10 000	-	-	-1.43887	0.00323	-1.40746	0.00034	0.00884	0.00009
20 000	-	-	-1.43590	0.00191	-1.41377	0.00020	0.00646	0.00009

Численное моделирование конвективного теплообмена в электронной системе при различных мощностях источника тепла

М.Ж. Акжолов

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail: agmprof@mail.ru

Аннотация: Приведены результаты численного расчета конвективного теплообмена тепловыделяющих элементов и воздушной среды в электронных системах при различных значениях мощности тепловыделения в источнике тепла.

Ключевые слова: электронные системы, тепловыделяющие элементы, конвективный теплообмен, мощность источника.

Рассматриваются процессы теплообмена между тепловыделяющими элементами (ТВЭ) и окружающей средой (воздух). Эти процессы имеют сложный характер и протекают одновременно в виде конвекции и излучения [4, 6], причем конвективный теплообмен в электронных системах (ЭС) может протекать как в ламинарном, так и турбулентном режимах. Граница между двумя этими режимами является довольно неустойчивой, так что поначалу спокойный ламинарный поток внезапно и непредсказуемо сменяется турбулентным и обратно. Как показано в работах [7,8] при тепловом проектировании ЭС необходимо учитывать такие факторы, как зависимость мощностей тепловыделения ТВЭ от температуры собственного разогрева, а температуры

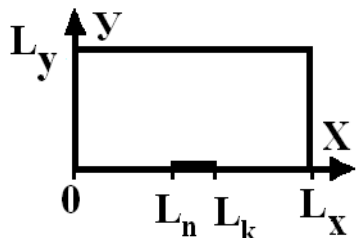


Рис. 1. Геометрия расчетной области

ТВЭ, в свою очередь, от изменившейся мощности (тепловая обратная связь); статистический интервальный характер тепловых процессов, вызванных интервальным характером определяющих параметров [8]; неоднородность и сложностью формы множества ТВЭ, входящих в конструкцию ЭС [9, 10, 11, 12] и др. [4] сопряженный характер теплообмена [5, 6].

В работах [1, 2, 6] приведены результаты математического и компьютерного моделирования ламинарно-турбулентного конвективного теплообмена ТВЭ с воздушной средой внутри ЭС. При моделировании принималось, что газовая среда идеальная, вязкость отсутствует, теплопроводность в газе пренебрежимо мала по сравнению с конвективным теплопереносом. Математическая модель газодинамических процессов, протекающих

при теплообмене ТВЭ и средой (система уравнений газовой динамики Эйлера) приведена в [1]. В работе [1] были изложены результаты расчетов выше сформулированной задачи когда на ТВЭ-е граничные условия задавались значения температуры: постоянное значение $T_{гр} = 500^{\circ}\text{K}$. Эти граничные условия источника, в математическом алгоритме реализовывались по следующему соотношению $E(x_{гр}, y_{гр}, t) = T_{гр} \cdot C_p$, где E – полная энергия, C_p – теплоемкость воздуха. Приведены динамика развития

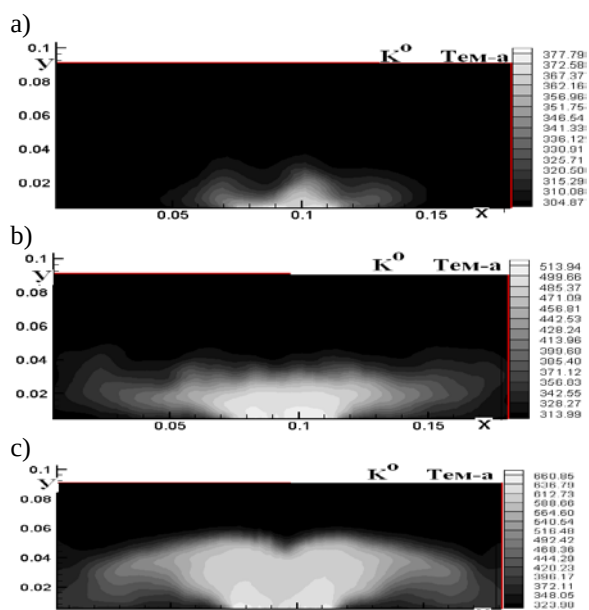


Рис. 2. Температурное поле воздуха. Мощности источника а) $W=10\text{Вт}$, б) $W=50\text{Вт}$, в) $W=100\text{Вт}$

тепловых процессов в зависимости от времени и сделаны анализы и оценка адекватности выбранной математической модели.

На практике больший интерес представляют граничные условия на ТВЭ в виде граничных условий 2 рода, когда в качестве источника тепла задается его мощность W . Граничные условия нагревания в источнике тепла задаются как [3]:

$$E(x_{ep}, y_{ep}, t) = \frac{Wt}{\rho(x_{ep}, y_{ep}, t) dx dy},$$

где ρ – плотность газа.

Размеры расчетной области составляли $L_x = 0.18$ м, $L_y = 0.09$ м (рис.1). У основания области $y = 0$ в первой расчетной ячейке при $L_n \leq x \leq L_k$ находится ТВЭ, начальная температура воздуха $T_0 = 300^\circ\text{K}$. Левая ($y = 0$) и правая ($y = L_x$) границы тепло-изолированы (поток равен нулю). На нижней границе в интервале $[L_k, L_n]$ задан источник тепла (ТВЭ) длиной 40 мм, в остальной области – условия непроницаемости. На верхней границе заданы условия свободного протекания и постоянная температура $T_0 = 300^\circ\text{K}$. Расчетная область разбивалась на 90×45 квадратных ячеек со сторонами 0.002 м, шаг по времени 10^{-8} сек.

Результаты и анализ

На рис. 2 приведены расчетные значения температурного поля воздуха в области с источником тепла различной мощности для момента времени 1с.

Анализ полученных результатов показывает следующее.

При нагреве области, занятой ТВЭ, над ним развивается конвективный процесс, который происходит за счет действия давления и гравитационных сил (максимальная скорость $\leq \sqrt{2g_0 H}$, где $H = 0.09$ м – высота расчетной области). Полученное изображение развития конвективных процессов в воздухе над ТВЭ достаточно хорошо отражает моделируемое физическое явление. Тепловые потоки, возникшие за счет нагревания ТВЭ развиваются плавно (монотонно) начиная с приповерхностного слоя, а дальнейшее развитие процесса во времени показывает расширение области охвата конвекцией все большего объема воздуха. По результатам моделирования хорошо видно, что в один и тот же момент времени размер охватываемой тепловым возмущением области изменяется с ростом мощности источника тепла.

Numerical simulation of convection in electronic systems at various powers of heat source

M.Zh. Akjолоv

Abstract. In this paper, we present the result of numerical simulation of the heat source's convection in the air in the electronic systems at various values of the power dissipation of it.

Keywords: electric systems, heat source, convection, source power.

Литература

1. М.Ж. Акжолов. Математическое моделирование конвективного теплообмена тепловыделяющего элемента с воздушной средой в электронной системе. // Труды НИИСИ РАН, Том 5 №2, 2015, 103 – 105.
2. М.Ж. Акжолов, П.И. Кандалов, И.Г. Лебо, А.Г. Мадера. Компьютерное моделирование конвективных процессов в воздушной среде вблизи электронных устройств. // Труды НИИСИ РАН, Т. 1, №2, 2011, 44 – 46.
3. О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982.
4. А.Г. Мадера. Моделирование теплообмена в технических системах. – М.: НФ им. В.А. Мельникова, 2005.
5. А.Г. Мадера. Математическое моделирование свободного конвективного теплообмена в электронных системах // Труды НИИСИ РАН, Том 1 №1, 2011, 31 – 37.
6. А.Г. Мадера, М.Ж. Акжолов, И.Г. Лебо. Моделирование развития процессов конвекции плюс теплопроводность в воздухе вблизи процессора. // Труды НИИСИ РАН, Т. 3, №1, 2013, 90 – 93.
7. А.Г. Мадера Концепция математического и компьютерного моделирования тепловых процессов в электронных системах // Программные продукты и системы. 2015. № 4, 79 – 86
8. А.Г. Мадера Моделирование интервально стохастических нестационарных и нелинейных тепловых процессов в электронных системах // Труды НИИСИ РАН. 2015. Т. 5. №1, 5 – 9
9. П.И. Кандалов, А.Г. Мадера Моделирование температурных полей в многослойных структурах // Программные продукты и системы. 2008. № 4, с. 11
10. А.Г. Мадера, П.И. Кандалов Моделирование трехмерных температурных полей в электронных модулях // Программные продукты и системы. 2010. №2, с. 36
11. A.G. Madera Simulation of stochastic heat conduction processes // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1994. Т. 37. № 16, 2571 – 2577.
12. A.G. Madera Heat transfer from an extended surface at a stochastic heat-transfer coefficient and stochastic environmental temperature // International Journal of Engineering Science. 1996. Т. 34. № 9, 1093 – 1099.

Интервально стохастические тепловые процессы, протекающие в электронном модуле, заключенном в герметичном корпусе

П.И. Кандалов

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail: agmprof@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается компьютерное и математическое моделирование интервально стохастических нестационарных тепловых процессов в электронных системах. Метод моделирования основан на получении и последующем решении уравнений для нестационарных статистических мер (математических ожиданий, дисперсий, ковариаций) распределений температуры в электронной системе при заданных интервалах изменения и статистических мерах (математических ожиданий, дисперсий, ковариаций) определяющих параметров.

Ключевые слова: тепловой процесс, электронная система, интервальный, стохастический, нелинейный, нестационарный, статистические меры

1. Введение

Практика проектирования и эксплуатации электронных систем (ЭС) показывает, что параметры, определяющие тепловые режимы в ЭС не являются точно определенными и детерминированными. Например, измерения тепловых сопротивлений и мощностей потребления у различных экземпляров микросхем одного и того же типа показывают, что их значения подвержены значительному разбросу внутри некоторых интервалов, положение границ которых определяется технологией изготовления и последующим выходным контролем микросхем [1, 5, 7, 8,]. Интервальная неопределенность определяющих параметров элементов ЭС обуславливает интервальную неопределенность температуры элементов, то есть реальные значения температуры каждого элемента в ЭС случайным образом распределены внутри интервалов своего изменения. Поэтому детерминированный подход к моделированию тепловых процессов в ЭС, при котором получают конкретные точечные значения температур элементов, не позволяет адекватно рассчитывать температурные распределения в ЭС и приводит к ошибкам проектирования ЭС.

Анализу и моделированию стохастических тепловых процессов посвящено достаточно большое количество работ [4, 6, 12 – 15, 18 – 22, 16, 17], однако, работы, относящиеся к моделированию нестационарных интервально стохастических тепловых процессов в сложных технических системах представлены явно недостаточно, а развитые в них подходы и методы не позволяют использовать их в практике моделирования и теплового проектирования ЭС.

В данной статье на основании метода, разработанного в [8, 9], рассматривается математическое и компьютерное моделирование нестационарных нелинейных интервально стохастических тепловых процессов в ЭС, представляющей собой электронный модуль

(ЭМ), заключенный в герметичном корпусе (рис. 1, а), содержащий многослойную печатную плату с установленными на ней активными (микропроцессорами, микросхемами) и пассивными электро- радиоэлементами. Потребляемая активными элементами мощность преобразуется в теплоту, которая приводит к нагреванию электронного всего модуля, воздушной среды внутри корпуса и собственно корпуса. Теплообмен внутри и

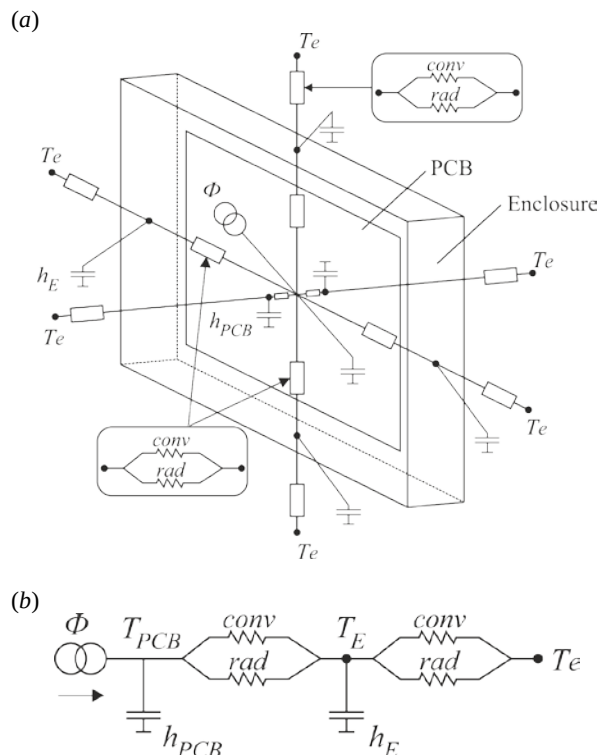


Рис. 1. Конструкция электронной системы (а) и ее тепловая схема (b)

снаружи ЭС осуществляется одновременно естественной конвекцией и излучением. Вследствие неизбежного статистического технологического разброса изготовления микросхем, электро- радиоэлементов, их установки и монтажа в ЭМ, различные экземпляры ЭС будут иметь различные значения определяющих тепловых параметров, обуславливая интервально стохастический характер тепловых процессов в ЭС.

2. Математическая модель нестационарных интервально стохастических тепловых процессов в электронном модуле

Стохастическая математическая модель, описывающая нестационарные тепловые процессы в тепловой модели (рис. 1, б) рассматриваемой конструкции ЭС, имеет следующий вид $((t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega)$:

$$h_{PCB} \frac{dT_{PCB}(t, \omega)}{dt} + J_{PCB-E}(T_{PCB}, T_E, t, \omega) = \Phi(\omega), \quad (1)$$

$$h_E \frac{dT_E(t, \omega)}{dt} + J_{E-e}(T_E, T_e, t, \omega) -$$

$$- J_{PCB-E}(T_{PCB}, T_E, t, \omega) = 0$$

где $T_{PCB} = T_{PCB}(t, \omega)$, $T_E = T_E(t, \omega)$, $T_e = T_e(t, \omega)$ – изотермические интервально стохастические температуры электронного модуля (PCB), корпуса ЭС (E), окружающей среды (e) соответственно; $h_{PCB} = \rho_{PCB} c_{PCB} V_{PCB}$ – полная теплоемкость электронного модуля объемом V_{PCB} , плотностью ρ_{PCB} и удельной теплоемкостью c_{PCB} ; $h_E = \rho_E c_E V_E$ – полная теплоемкость конструкции корпуса объемом V_E , плотностью ρ_E и удельной теплоемкостью c_E ; $\Phi(\omega)$ – мощность потребления электронного модуля;

$J_{PCB-E}(T_{PCB}, T_E, t, \omega) = J_{PCB-E}^{conv} + J_{PCB-E}^{rad}$ – суммарный тепловой поток конвекции и излучения между электронным модулем и корпусом ЭС; $J_{E-e}(T_E, T_e, t, \omega) = J_{E-e}^{conv} + J_{E-e}^{rad}$ – суммарный тепловой поток конвекции и излучения от корпуса ЭС в окружающую среду.

Стохастические тепловые потоки J_{PCB-E}^{conv} , J_{PCB-E}^{rad} и J_{E-e}^{conv} , J_{E-e}^{rad} имеют следующий вид [1, 11]:

$$J_{PCB-E}^{conv} = a_1 (T_{PCB} - T_E)^{5/4},$$

$$J_{PCB-E}^{rad} = a_2 (T_{PCB}^4 - T_E^4),$$

$$J_{E-e}^{conv} = a_3 (T_E - T_e)^{4/3}, \quad J_{E-e}^{rad} = a_4 (T_E^4 - T_e^4),$$

где a_i , $i = 1, 2, 3, 4$ – числовые коэффициенты, определяемые размерами конструкции и теплофизическими характеристиками материалов элементов и среды внутри и вне ЭС.

Проводя линеаризацию нелинейных тепловых потоков J_{PCB-E}^{conv} , J_{PCB-E}^{rad} , J_{E-e}^{conv} , J_{E-e}^{rad} относительно центрированных стохастических температур (п. 3) $T_{PCB}(t, \omega)$, $T_E(t, \omega)$, $T_e(t, \omega)$ получим вместо уравнений (1), (2) следующие линейные стохастические уравнения:

$$h_{PCB} \frac{dT_{PCB}(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_{PCB} + f_1 T_{PCB}(t, \omega) +$$

$$+ f_2 T_E(t, \omega) = \Phi(\omega)$$

$$h_E \frac{dT_E(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_E + f_3 T_{PCB}(t, \omega) +$$

$$+ f_4 T_E(t, \omega) + f_5 T_e(t, \omega) = 0$$

где $f_1 - f_5$ – нелинейные функции, равные частным производным тепловых потоков J_{PCB-E}^{conv} , J_{PCB-E}^{rad} , J_{E-e}^{conv} , J_{E-e}^{rad} по переменным T_{PCB} , T_E , T_e , при значениях переменных равных их математическим ожиданиям $\bar{T}_{PCB}$, $\bar{T}_E$, $\bar{T}_e$.

Следуя разработанному [8, 9] методу, учитывая попарную статистическую независимость температуры среды и мощности тепловыделения, получим уравнения для статистических мер стохастических нестационарных температур электронного модуля, корпуса ЭС и окружающей среды:

$$h_{PCB} \frac{dT_{PCB}(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_{PCB} = \bar{\Phi}, \quad (5)$$

$$h_E \frac{dT_E(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_E = 0, \quad (6)$$

$$h_{PCB} \frac{dVar_{TPCB}(t)}{dt} + 2f_1 Var_{TPCB}(t) +$$

$$+ 2f_2 K_{TPCB-TE}(t) - 2K_{TPCB-\Phi} = 0$$

$$h_E \frac{dVar_{TE}(t)}{dt} + 2f_3 K_{TPCB-TE} +$$

$$+ 2f_4 Var_{TE}(t) + 2f_5 K_{TE-Te} = 0$$

$$\frac{dK_{TPCB-TE}(t)}{dt} + (h_{PCB}^{-1}f_1 + h_E^{-1}f_4)K_{TPCB-TE}(t) + h_{PCB}^{-1}f_2Var_{TE}(t) + h_E^{-1}f_3Var_{TPCB}(t) + h_E^{-1}f_5K_{TPCB-Te}(t) - h_{PCB}^{-1}K_{TE-\Phi} = 0$$

$$h_{PCB} \frac{dK_{TPCB-\Phi}(t)}{dt} + f_1K_{TPCB-\Phi}(t) + f_2K_{TE-\Phi}(t) = Var_{\Phi}$$

$$h_E \frac{dK_{TE-\Phi}(t)}{dt} + f_3K_{TPCB-\Phi}(t) + f_4K_{TE-\Phi}(t) = 0$$

$$h_{PCB} \frac{dK_{TPCB-Te}(t)}{dt} + f_1K_{TPCB-Te}(t) + f_2K_{TE-Te}(t) = 0$$

$$h_E \frac{dK_{TE-Te}(t)}{dt} + f_3K_{TPCB-Te}(t) + f_4K_{TE-Te}(t) = -f_5Var_{Te}$$

с начальными условиями:

$$\bar{T}_{PCB}(t=0) = \bar{T}_E(t=0) = \bar{T}_e,$$

$$Var_{TPCB}(t=0) = Var_{TE}(t=0) = Var_{Te},$$

$$K_{TPCB-TE}(t=0) = Var_{Te},$$

$$K_{TPCB-\Phi}(t=0) = K_{TE-\Phi}(t=0) = 0,$$

$$K_{TPCB-Te}(t=0) = K_{TE-Te}(t=0) = Var_{Te},$$

где $Var_{TPCB}(t)$, $Var_{TE}(t)$ – дисперсии температур электронного модуля и корпуса ЭС; $K_{TPCB-TE}(t)$ – ковариация между стохастическими температурами $T_{PCB}(t, \omega)$ и $T_E(t, \omega)$; Var_{Te} – дисперсия стохастической температуры среды; Var_{Φ} – дисперсия стохастической мощности тепловыделения электронного модуля; $K_{TPCB-\Phi}$, $K_{TE-\Phi}$ – ковариации между стохастическими температурами электронного модуля и корпуса ЭС и стохастической мощностью тепловыделения электронного модуля; $K_{TPCB-Te}$, K_{TE-Te} – ковариации между стохастическими температурами электронного модуля и корпуса ЭС и стохастической температурой окружающей среды.

В уравнениях (5) – (13) математические ожидания $\bar{T}_e$, $\bar{\Phi}$ и дисперсии Var_{Te} , Var_{Φ} , коэффициенты

$a_1 - a_4$ и функции $f_1 - f_5$ являются известными из исходных данных и легко вычисляются.

Уравнения (5) – (13) описывают нестационарные статистические меры параметров теплового процесса в рассматриваемой конструкции ЭС и представляет собой систему нелинейных, нестационарных дифференциальных уравнений первого порядка в обыкновенных

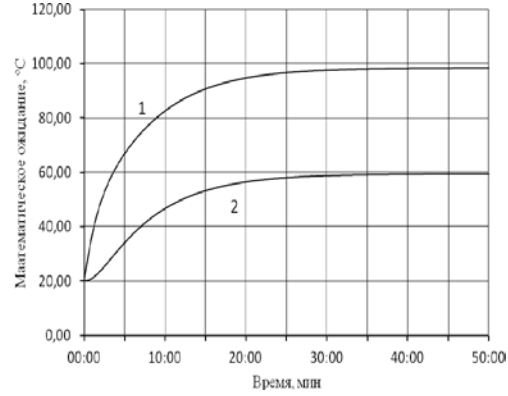


Рис. 2. Нестационарные математические ожидания (°C) стохастических температур электронного модуля (1) и корпуса ЭС (2)

производных. Решение уравнений осуществлялось с помощью численного метода Рунге-Кутты.

Результаты вычислений статистических мер по полученным уравнениям приведены на рис. 2 и рис. 3 при следующих исходных данных: $\bar{T}_e = 293$ К, $\bar{\Phi} = 30$ Вт, $Var_{Te} = 1.5^\circ\text{C}^2$, $Var_{\Phi} = 0.7^\circ\text{C}^2$. Интервалы изменения стохастической температуры электронного модуля

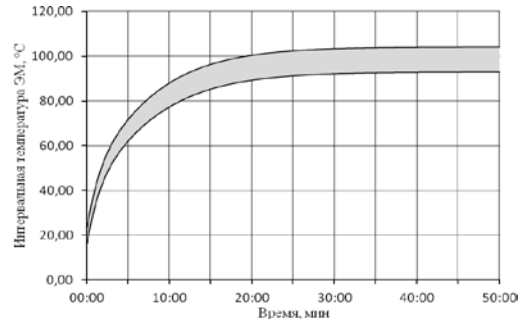


Рис. 3. Изменение во времени интервальной стохастической температуры (°C) электронного модуля

$[T_{Bot,PCB}(t), T_{Up,PCB}(t)]$ (рис. 3) рассчитывались по теореме Чебышева [10] при $\chi = 3$, что соответствует вероятности $P = 0,89$ обнаружить реальные значения стохастических температур ЭМ внутри найденного интервала.

Вычисления показывают, что в установившемся режиме температура ЭМ изменяется в интервале $[90^\circ\text{C}, 105^\circ\text{C}]$, а температура корпуса ЭС – в интервале $[54^\circ\text{C}, 63^\circ\text{C}]$. Иначе говоря, установившиеся температуры электронного модуля $T_{PCB}(\omega)$ и корпуса $T_E(\omega)$

в каждом конкретном экземпляре ЭС, извлеченном из партии однотипных ЭС, могут иметь любое значение в пределах интервалов $T_{PCB}(\omega) \in [90^\circ\text{C}, 105^\circ\text{C}]$ и $T_E(\omega) \in [54^\circ\text{C}, 63^\circ\text{C}]$ с вероятностью не менее 0,89. Установившаяся дисперсия разброса значений температуры ЭМ ($\text{Var}_{TPCB} = 3.4^\circ\text{C}^2$) существенно превышает таковую для температуры корпуса ЭС ($\text{Var}_{TE} = 1.6^\circ\text{C}^2$), что обуславливается более высокой чувствительностью стохастических тепловых процессов в ЭС

к случайным изменениям мощности потребления по сравнению со случайными изменениями температуры окружающей среды.

Найденные интервальные значения температур имеют важное практическое значение для теплового проектирования ЭС, так как позволяют еще на этапе проектирования прогнозировать наибольшие и наименьшие значения температур, которые будут иметь место на практике в процессе функционирования реальных ЭС, а также более точно оценивать электрические и надежностные параметры проектируемой ЭС.

Interval stochastic thermal processes occurring in the electronic module in sealed enclosure

P.I. Kandalov

Abstract: The article deals with the computer and mathematical modeling of the interval stochastic unsteady state thermal processes in electronic systems. The simulation method is based on the receipt and subsequent decision of equations for unsteady statistical measures (expected value, variance, covariance) of the temperature's distributions at specified variance intervals and statistical measures of the governing parameters.

Keywords: thermal process, electric system, interval, stochastic, nonlinear, unsteady, statistical measure

Литература

1. Г.Н. Дульнев, Н.Н. Тарновский Тепловые режимы электронной аппаратуры. – М.: Энергия, 1971
2. Конструкторско технологическое проектирование электронной аппаратуры / Под общ. редакцией В.А. Шахнова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, 568 с.
3. П.И. Кандалов, А.Г. Мадера Моделирование температурных полей в многослойных структурах // Программные продукты и системы. 2008. № 4. С. 11
4. А.Г. Мадера, П.И. Кандалов Моделирование трехмерных температурных полей в электронных модулях // Программные продукты и системы. 2010. №2. С. 36
5. А.Г. Мадера, П.И. Кандалов Анализ интервально стохастических температурных полей технических систем // Программные продукты и системы. 2014. №4. С. 41 – 45
6. А.Г. Мадера, П.И. Кандалов Моделирование температурных полей технических систем в условиях интервальной неопределенности // Тепловые процессы в технике. 2014. № 5. С. 225 – 229
7. А.Г. Мадера, П.И. Кандалов Компьютерное моделирование температурных полей технических систем при интервально стохастической неопределенности параметров // Прикладная информатика. 2015. № 1 (55). С. 106 – 113
8. А.Г. Мадера Концепция математического и компьютерного моделирования тепловых процессов в электронных системах // Программные продукты и системы. 2015. № 4. С. 79 – 86
9. А.Г. Мадера Моделирование интервально стохастических нестационарных и нелинейных тепловых процессов в электронных системах // Труды НИИСИ РАН. 2015. Т. 5. №1. С. 5 – 9
10. Ю.А. Розанов Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1985
11. G.N. Ellison Thermal computations for electronics. Conductive, radiative, and convective air cooling. – NY.: CRC Press, 2011
12. C. Gardiner Stochastic methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences – N.Y.: Springer, 2009
13. J.C. Georgiadis On the approximate solution on non-deterministic heat and mass transport problems // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 33. n. 8. P.2099 – 2105
14. N.G. Kampen van Stochastic Processes in Physics and Chemistry. – North Holland: Elsevier. 2007
15. C.J. Keller, V.W. Antonetti Statistical thermal design for computer electronics // Electronic Packaging and Production. 1979. V.19.n.3. P. 55 – 62.
16. A.G. Madera Simulation of stochastic heat conduction processes // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1994. T. 37. № 16. С. 2571 – 2577.
17. A.G. Madera Heat transfer from an extended surface at a stochastic heat-transfer coefficient and stochastic environmental temperature // International Journal of Engineering Science. 1996. T. 34. № 9. С. 1093 – 1099.

18. J. Padovan, Y.H. Guo Solution of non-deterministic finite element and finite difference heat conduction simulations // Numer. Heat Transfer A. 1989. Vol. 15, P. 383 – 398.
19. S.E. Serrano, T.E. Unny, W.C. Lennox Analysis of stochastic ground water flow problems // J. Hydrol. 1985. Vol. 82. P. 285 – 306.
20. S.E. Serrano, T.E. Unny Random evolution equations in hydrology // Appl. Math. Comput. 1990. Vol. 38. P. 201 – 226.
21. Da Yu Tzow, Stochastic analysis of temperature distribution in a solid with random heat conductivity // Trans. ASME, J. Heat Transfer. 1988. Vol. 110, P. 23 – 29.
22. T. Yoshimura, A. Campo Extended surface heat rejection accounting for stochastic sink temperatures // AIAA J. 1981. Vol. 19. P. 221 – 225

Генератор стохастических тестов с ограниченным моделированием выполнения

А.С. Куцаев

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail : koutsae@niisi.msk.ru

Аннотация. Преимущество генераторов случайных тестов в простоте их применения. Стохастическое тестирование выявляет как обычные, так и специфические ошибки (редкие сочетания и недочеты спецификации). Тестирование составляющих проекта требует задания большого числа параметров, связанных с этими составляющими. Это вызывает необходимость автоматизации и развития модели целевого устройства. Для этого служит встроенный специализированный симулятор. Его использование позволяет снять ряд ограничений, в том числе при применении циклов для тестирования способов повышения быстродействия. Дальнейшее развитие возможностей генераторов случайных тестов требует автоматизировать средства подготовки шаблонов.

Ключевые слова: верификация, покрытие, случайные тесты, шаблон, симулятор.

1. Введение

Генераторы случайных тестов стали популярным средством тестирования микропроцессоров благодаря простоте их использования. Стохастическое тестирование позволяет выявить ошибки, которые трудно обнаружить другими способами, в том числе ошибки, возникающие в результате случайного сочетания условий и недочетов спецификации. Стохастическое тестирование в сочетании с контролем покрытия тестов является существенной частью системы средств функциональной верификации [1, 2].

Случайные тесты могут быть как общими, так и специализированными, т. е. ориентированные на отдельные части проекта - вычисления, обмен с памятью, механизмы конвейера и т. д. При общем тестировании генератор тестов по небольшому шаблону выдает тестовый код произвольного размера, свойства которого близки к свойствам типичных прикладных программ. При тестировании отдельных частей проекта нужно создавать тестовые ситуации определенного вида. При этом необходимо использовать все управляющие параметры генератора тестов, относящиеся к данной части проекта. Усложнение разработки шаблонов подтверждает необходимость создания генераторов тестов с более высоким уровнем автоматизации [1]. Это в свою очередь требует более точного моделирования целевого устройства.

Для генератора случайных тестов первичной моделью микропроцессора является набор инструкций и правила, обеспечивающие корректность теста. Эти правила определяют запрещенные комбинации инструкций, допустимые адреса, а также требования к инициализации содержимого регистров и памяти данных. Моделью следующего уровня является симулятор выполнения программы. К симулятору, встроенному в генератор тестов, предъявляются

особые требования. Часть их вызвана тем, что выполняемая программа и данные не заданы заранее, а вырабатываются параллельно с моделированием выполнения. Другая часть требований связана со встраиванием симулятора в среду выполнения.

Для упрощения создания тестов с определенными свойствами в генераторе тестов применяются различные средства автоматизации. Например, для повышения покрытия по сочетаниям классов инструкций разработан оператор, который автоматически вырабатывает эти сочетания при случайном выборе инструкций в классах. Для повышения покрытия тестов служит также автоматическая случайная предзагрузка регистров. Использование циклов автоматически приводит к характерным изменениям состояния процессора.

Цель настоящей работы - описание возможностей, предоставляемых универсальным генератором случайных тестов `terg32`, одним из семейства генераторов, разрабатываемых в НИИСИ РАН для процессоров архитектуры MIPS [3], [4]. Исходные данные для генерации теста - это шаблон, который включает задание управляющих параметров и программу построения теста (заготовку тестового кода) на интерпретирующем языке. Составляющие шаблона рассматриваются далее более подробно. В первой части работы анализируются методы управления случайным выбором. Во второй части рассматривается повышение эффективности тестирования вычислений, обмена с памятью и передач управления. Обсуждается использование циклов.

2. Управление свойствами теста

2.1. Качество теста

Качество случайного теста можно оценить по частоте создания тестовых ситуаций, а также по

равномерности покрытия. Заранее нельзя предсказать, где будет обнаружена ошибка. Однако из опыта известно, что ошибки часто проявляются в "угловых" ситуациях, когда значения двух и более параметров лежат на границе области допустимых значений. Это обстоятельство всегда учитывается при организации случайного выбора параметров: вероятность выбора на границе области значений обычно выше средней. При этом нужно иметь в виду, что область и ее граница могут быть устроены сложно - как, например, в случае чисел с плавающей точкой.

Наряду с "угловыми" ситуациями для тестирования представляет интерес создание критических условий по времени, когда данные требуются сразу после их выработки или еще раньше. Эти ситуации полезны при тестировании механизмов, обеспечивающих безотказное функционирование процессора.

При генерации теста нередко возникают ситуации, когда регистр требует перезагрузки, поскольку его текущее содержимое недопустимо или не совпадает с требуемым. Вставка соответствующих инструкций в тестовый код увеличивает его размер, а их выполнение добавляет задержки и второстепенные зависимости по данным. Снижение числа перезагрузок регистров или хотя бы изменение их места способно повысить качество теста.

Размер случайного тестового кода практически не ограничен, но на его выбор влияет ряд факторов. Слишком длинный код может содержать повторение тестовых ситуаций, не отличающихся принципиальной новизной. Кроме того, в нем труднее искать место ошибки в случае ее выявления. С другой стороны, в коротком тестовом коде случайные факторы не успевают проявиться в полной мере, а доля накладных расходов велика. Поэтому размер кода обычно подбирается опытным путем.

2.2. Специфика использования симулятора

При генерации случайных тестов полезна любая информация о состоянии процессора во время выполнения, поскольку она может быть использована для более частого выбора тестовых ситуаций. Встроенный симулятор позволяет отслеживать циклы и вызовы процедур, снимая тем самым жесткие ограничения на их использование в тестах. В частности, без симулятора невозможно эффективно использовать в цикле обращение к памяти с переменным адресом. В других случаях из-за отсутствия информации приходится выполнять лишние перезагрузки регистров.

Информацию, необходимую для генератора тестов, предоставляет встроенный симулятор. К нему предъявляются особые требования. Во-первых, код и данные передаются для выполнения не сразу, а постепенно, по мере их генерации. Во-вторых, обычно симулятору требуются данные о среде запуска, обработчиках прерываний и т.д. Получение этих данных может вызывать сложности, если составляющие системы разрабатываются независимо.

При этом свойства теста оказываются потенциально зависимыми от состояния окружения.

С другой стороны, для генератора тестов нужна не вся информация о состоянии процессора, а при необходимости генератор может менять это состояние в нужную для себя сторону. Одно из решений проблемы отсутствия внешней информации - это симулятор, в котором содержимое регистра и слова памяти может быть отмечено как неизвестное. Например, если вычислительная операция привела к исключительной ситуации, то вместо ее обработки данные, которые могли быть при этом изменены, просто объявляются неизвестными. Операции над неизвестными данными также дают неизвестный результат. Если содержимое большинства регистров известно, этого вполне достаточно для эффективной работы генератора тестов. Когда число регистров с известным содержимым меньше порога, генератор добавляет групповое обновление содержимого регистров.

В отличие от памяти, в регистрах можно делать неизвестными отдельные биты. Это необходимо для регистров управления, чтобы сохранить известность бит, задающих режимы. Например, в регистре `fcscr` всегда должны быть известны биты режима округления и бит условия перехода. Другие биты регистра симулятор не контролирует.

При таком подходе поведение симулятора может определяться только стандартом архитектуры. Очевидные плюсы - независимость от изменений системного ПО и легкость переноса.

2.3. Объекты для случайного выбора

Тест включает тестовый код и начальное содержимое памяти данных и регистров. Тестовый код - это последовательность инструкций с определенными аргументами. Она создается на основе программы построения теста, построенной из операторов простого интерпретирующего языка. Инструкции добавляются в последовательность в результате случайного выбора инструкций, последовательного выбора из списков или комбинации того и другого. Кроме того, в тестовый код делаются различные вставки, как случайные, так и необходимые для разделения несовместимых инструкций и загрузки в регистры нужного содержимого.

Полезным средством для таких вставок являются макросы, которые можно вызывать в программе построения теста как прямо, так и случайно. Макрос представляет собой отдельный шаблон, разработанный для добавления в тест некоторого набора действий. Важным свойством макроса является наличие наследуемого контекста, включающего вероятности выбора, резервирование регистров и распределение памяти.

Случайный выбор инструкций основан на том, что для каждой инструкции задана вероятность выбора. Если почти все вероятности ненулевые, то результатом обычно является длинная последовательность, включающая практически все инструкции процессора.

Другая часто используемая возможность - это случайный выбор одной или нескольких инструкций из небольшого подмножества.

Перебор списка инструкций организован в виде итератора, который играет роль цикла в языке описания программы. На каждой итерации вырабатывается фрагмент кода, в определенном месте которого добавляется очередная инструкция из списка. При таком переборе случайность может проявляться при выборе аргументов инструкций, а также за счет случайного перемешивания списков. Вложенный перебор дает возможность быстро получить покрытие по сочетаниям инструкций (парам, тройкам и т. д.), если число всех инструкций сравнительно невелико. Однако регулярность получаемого кода мешает полностью использовать преимущества стохастического тестирования, а при большом числе инструкций размер кода растет очень быстро. В этом случае используется сочетание перебора и случайного выбора.

Как только очередная инструкция для тестового кода выбрана, генератор определяет ее аргументы и связанные с ними данные, такие как адреса и содержимое памяти. Ниже перечислены виды объектов для случайного выбора, каждый из которых имеет свои особенности.

- Аргументы инструкций;
- Содержимое памяти и регистров;
- Адреса кода и данных.

Аргументы каждой инструкции могут задаваться частично или полностью. Это позволяет выполнять определенные действия, обеспечивать корректность кода и необходимые связи, устраивать перебор аргументов. Однако в случайных тестах большого объема аргументы инструкций в основном выбираются случайно, согласно управляющим параметрам, заданным в шаблоне. Поэтому качество теста существенно зависит от правильного задания этих параметров.

Способ случайного выбора зависит от специфики аргумента. Среди них можно выделить следующие основные группы.

- Регистры и непосредственные операнды вычислительных операций;
- Аргументы, определяющие адрес при обращении к памяти данных;
- Целевой адрес перехода и аргументы условия, если переход условный.

Случайный выбор непосредственных операндов является самым простым, так как сводится к выбору чисел по заданным для них вероятностям. Выбор регистров вычислительных операций также сравнительно прост, поскольку для него нет специальных ограничений (не считая ненулевого делителя при целочисленном делении). Выбор таких регистров по возможности учитывает недавнюю предысторию их использования. Это полезно при тестировании конвейера.

Более сложным является выбор аргументов, определяющих адрес памяти данных. Случайный

выбор самого адреса несложен. Однако адрес не является аргументом инструкции, поскольку получается сложением содержимого регистра базы и непосредственного смещения. В худшем случае это означает, что для случайно выбранного адреса потребуется перезагрузить регистр, что нежелательно. Поэтому в генераторе тестов используются различные приемы, позволяющие обойтись без перезагрузки регистров при сохранении случайного выбора адреса.

Выбор целевого адреса перехода, как и адреса данных, не вызывает сложностей. При регистровом переходе перезагрузка регистра практически неизбежна, так как целевой адрес вычисляется непосредственно перед переходом, а случайное совпадение адреса и содержимого выбранного регистра маловероятно. Генератор тестов позволяет выполнить перезагрузку регистра заранее, за несколько инструкций до перехода (операция предзагрузки).

Случайный выбор условия перехода сам по себе прост, однако может привести к лишним действиям. Условие перехода вычисляется по одному либо двум регистрам CPU или FPU, содержимое которых должно быть известно (кроме случаев тождества, в том числе при совпадении номеров регистров). Если содержимое регистров неизвестно либо не удовлетворяет случайно выбранному условию перехода, необходима перезагрузка регистров. Однако случайный выбор условия не является обязательным, если переход должен происходить примерно в половине случаев. Тогда сам выбор регистров для условия перехода обеспечивает достаточную степень случайности, условие определяется текущим содержимым регистров и перезагрузки удастся избежать.

Также свойства теста зависят от выбора начального содержимого регистров и памяти данных. Содержимое регистров определяет частоту тестовых ситуаций того или иного вида при тестировании вычислений. По мере выполнения тестового кода содержимое регистров изменяется за счет записи результатов вычислений. Добавляя в тестовый код определенную долю инструкций загрузки из памяти, можно обновлять содержимое регистров данными памяти, имеющими заданное распределение вероятностей.

2.4. Техника случайного выбора

При генерации тестов случайный выбор основан на задании вероятностей, которые могут относиться к выбираемым величинам, а также к способам выбора или целевым ситуациям. Выбор чисел, регистров и адресов происходит по разным правилам. При определении аргументов инструкций часто требуется совместный выбор этих данных.

Инструкции. Для выбора инструкций задается дерево инструкций с весами. Узел в нем имеет имя и неотрицательный вес. Конечные узлы соответствуют одноименным инструкциям. Случайный выбор производится на каждом уровне структуры, пока не будет выбран конечный узел. Вес пропорционален вероятности выбора на данном уровне. Дерево

инструкций дает удобную возможность изменять вероятности выбора для групп инструкций.

Числа. Случайный выбор числовых значений используется при определении начального содержимого памяти данных и регистров, а также аргументов, задающих непосредственные значения. Тип числа - целое либо с плавающей точкой, а также разрядность определяется операцией и типом приемника, как указано ниже.

- При инициализации регистров разрядность плавающей точки задается в установках шаблона.
- При задании непосредственных аргументов выбираются только целые числа, разрядность определяется размером поля.
- При загрузке из памяти регистров CPU память инициализируется данными целого типа. При загрузке регистров FPU тип и разрядность выбираются в соответствии с форматом инструкции (см. ниже).

В сопроцессоре плавающей точки данные в регистре имеют один из трех форматов: два для данных с плавающей точкой и один формат для фиксированной точки. Для загрузки и сохранения данных служат инструкции `lwcl` и `swcl`, которые не несут информацию о формате. Эта информация необходима генератору тестов для выбора адресов и инициализации данных определенного типа. Другая сложность состоит в том, что для загрузки и сохранения 64-битовых данных нужно выполнить пару инструкций со связанными аргументами. В генераторе тестов проблема решается введением инструкций загрузки и сохранения для каждого формата данных. Формат S (32 бита, плавающая точка) обслуживают обычные инструкции `lwcl` и `swcl`. Для формата W (фиксированная точка) используются их ассемблерные идиомы `licl` и `sicl`. Для формата D (64 бита, плавающая точка) введены макрооперации `ldcl` и `sdcl`, которые разворачиваются в пару инструкций `lwcl` и `swcl`, соответственно. Адреса и регистры в них связаны, что обеспечивает корректный ввод-вывод данных двойной точности с учетом режима Endian. Таким образом, тип и разрядность данных при загрузке и сохранении регистров FPU определяется операцией.

Формально для случайного выбора чисел каждому числу соответствует вероятность. На практике, чтобы управлять этими вероятностями, используется небольшое количество групп чисел, в каждой из которых все значения равноценны и имеют одинаковую вероятность. Сам выбор происходит в 1-2 этапа.

Для целых чисел со знаком в таблице 1 приведены числа и группы чисел, для которых назначаются вероятности. Здесь при любой разрядности числа старший бит всегда играет роль знака. Также в выборе целых чисел участвуют группы чисел на основе битовых шаблонов, которые могут демонстрировать свойства операций целочисленной арифметики, логики и побитовых операций.

Таблица 1. Группы выбора целых чисел

Числа 32 бит	Описание
0x80000000	Максимальное со знаком
0x80000001	Отрезок
...	...
0xFFFFFFFF	-1, максимальное без знака
0x00000000	Ноль
0x00000001	Единица
0x00000002	Отрезок
....	
0x7FFFFFFF	Максимальное со знаком

Таблица 2. Битовые шаблоны выбора целых чисел

Шаблоны	Описание
...01010101...	Чередование нулей и единиц
...00110011...	Чередование пар нулей и единиц
...000111...	Чередование троек нулей и единиц
111...000	Единицы в старшей части, нули в младшей
000...111	Нули в старшей части, единицы в младшей

Для чисел с плавающей точкой деление на группы отражает структуру числа (знак, порядок, мантисса). На первом этапе выбирается группа чисел - нормализованные, денормализованные, границы интервалов (нули, единицы, наибольшие и наименьшие по абсолютной величине) и специальные (бесконечность и NaN), отдельно для знаков плюс и минус. Отдельные группы составляют нормализованные числа с мантиссами специального вида, содержащими только нули, только единицы либо один ноль или единицу в случайной позиции.

Если выбрано нормализованное число, то его порядок выбирается в одном или нескольких интервалах, согласно заданным для них вероятностям выбора. Интервалы порядка для одинарной и двойной точности задаются отдельно.

Адреса данных. Случайный выбор адресов данных отражает специфику их использования. Память данных разделена на блоки, по аналогии со страницами TLB или строками кэша. Адрес определяется блоком и смещением относительно границы блока (старшая и младшая части адреса, соответственно). В шаблоне задаются вероятности для случайного выбора размера блока и параметры для выбора смещения. При выборе блоков учитывается только допустимость получаемых адресов и, возможно, связанный с ними тип данных. Искользованные адреса сохраняются в очереди, и определенная часть адресов может выбираться из очереди повторно.

Помимо этого, для выбора адресов данных может быть использована модель кэша. При этом вначале по заданным вероятностям выбирается желательный результат - промах или попадание в кэш, в том числе с нужными особенностями. Затем в модели кэша строится допустимый адрес, по возможности приводящий к выбранному результату.

Адреса перехода. Случайный выбор адресов кода для передач управления отчасти напоминает выбор адресов данных, однако при генерации переходов действуют другие ограничения. Так, случайный

переход может делаться только в свободное место памяти кода, куда еще не записаны инструкции. Это исключает повторное использование адресов перехода (кроме циклов и процедур). При наличии одной области памяти кода переходы возможны только вперед, при двух и более областях этого ограничения нет.

Регистры. Регистр для аргумента инструкции выбирается из подходящих по типу, исключая зарезервированные, в том числе временно. Дополнительно случайно выбирается одно из следующих условий, учитывающих предысторию использования:

- Регистр не использован в течение заданного числа тактов;
- Регистр прочитан или записан на заданном отрезке тактов;
- Регистр прочитан на заданном отрезке тактов;
- Регистр записан на заданном отрезке тактов.

Такты здесь отсчитываются от стадии конвейера, на которой будет использован регистр. В модели конвейера учитывается механизм bypass, которые позволяет использовать результат операции, не дожидаясь его физической записи в регистр. Поэтому запись регистра привязана к стадии конвейера, после которой результат становится доступным, а чтение - к той стадии, на которой используется прочитанное значение. Так, при простых одноктактовых вычислениях использование операндов и получение результата связано с одной и той же стадией конвейера.

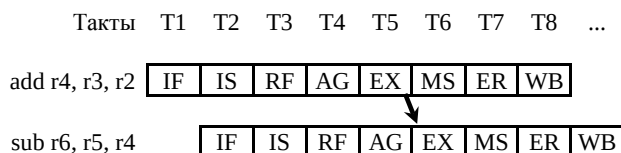


Рис. 1. Конвейер и bypass при простых вычислениях

На Рис. 1 показан пример таких вычислений. Результат сложения, полученный на стадии конвейера EX, доступен для следующей инструкции на ее стадии EX, до записи в регистр (стадия WB). В этом примере при выборе регистров для второй инструкции считается, что регистр r4 использован на запись один такт назад.

Подчеркнем, что такты использования регистров связаны не с порядковыми номерами инструкций, а с тактами конвейера. Тем не менее, для одноктактовых вычислений разницы нет. Для других инструкций это не так: например, регистр базы адреса данных используется на стадии AG, что может приводить к задержке при вычислении базы. Модель конвейера позволяет точнее генерировать зависимости по данным. Однако, чем точнее задан отрезок тактов, тем меньше возможности удовлетворить дополнительным условиям.

Отдельная дополнительная возможность - это выбор одного и того же регистра для всех аргументов инструкции. Эта ситуация интересна и для тестирования конвейера. Ей соответствует отдельная

вероятность, поскольку при независимом выборе регистров эта ситуация реализуется очень редко.

В отдельных случаях выбор регистров может учитывать их содержимое. Например, при формировании обращения к памяти адрес, выбранный случайно, должен складываться из содержимого регистра базы и непосредственного 16-битового смещения. Если смещение выбрать случайно, почти наверняка потребуется перезагрузка регистра базы. Поэтому по возможности делается иначе: для случайно выбранного адреса подбираются регистры, известное содержимое которых в сумме с некоторым 16-битовым смещением может дать данный адрес. При достаточном количестве таких регистров регистр базы выбирается из них, а смещение вычисляется по его содержимому. Снижение последствий перезагрузки регистров рассматривается в следующей главе.

3. Создание шаблонов - некоторые возможности

3.1. Обзор тестовых ситуаций

Для случайного тестирования можно условно выделить направления, по которым проводится тестирование. Для каждого направления можно указать виды характерных тестовых ситуаций и объектов, случайный выбор которых играет главную роль. Так, при тестировании вычислений нужно выполнять вычислительные инструкции и их сочетания при всех характерных комбинациях операндов, определяющих тот или иной вариант выполнения. Для обмена с памятью проверяются попадания и промахи в кэш данных и TLB, а также готовность данных при частом повторном обращении по одним и тем же адресам. При переходах важен процесс переключения конвейера на новый источник инструкций и особенности выполнения инструкций в слоте задержки. При тестировании конвейера тестовые ситуации создаются задержками из-за зависимостей по данным, занятости ресурсов, промахов и попаданий в кэш и т. д. Наконец, при общем тестировании проверяются случайные сочетания тестовых ситуаций всех видов.

Возможное соответствие направлений тестирования и объектов для случайного выбора приведено в следующей таблице.

Таблица 3. Объекты для случайного выбора

Тестирование	Инструкции	Числа	Регистры	Адреса данных	Адреса кода
Вычисления	да	да	да	-	-
Память	да	-	да	да	-
Переходы	да	-	-	-	да
Конвейер	да	-	да	-	-
Общее	да	да	да	да	да

3.2. Покрывание по инструкциям

Одним из способов оценки функционального покрытия является подсчет числа выполнения всех пар

инструкций, всех троек, четверок и т.д. Начиная с троек и выше, такой подсчет трудно использовать из-за большого объема данных. В то же время многие инструкции близки друг к другу по своему устройству и действию, так что они могут играть одинаковую роль в оценках. Это приводит к введению классов инструкций и к более компактной оценке покрытия по сочетаниям классов инструкций.

В генераторе тестов можно организовать перебор сочетаний инструкций при помощи вложенных итераторов. Последовательность инструкций получается регулярной, несмотря на возможность случайного перемешивания списков. Тем не менее, остальные составляющие теста случайны. Проблема здесь в том, что при переходе от пар к тройкам и выше объем тестового кода резко растет. Чтобы получить все различные цепочки инструкций длины k из набора в n инструкций по одному разу, требуется порядка n^k/k инструкций. С учетом того, что при случайном тестировании нужно выполнять по несколько экземпляров таких цепочек, размер кода становится слишком большим.

Вместе с тем, оценка покрытия кода, полученного в результате вложенного перебора инструкций, показывает неравномерность покрытия по сочетаниям классов инструкций. Число сочетаний, в которых инструкции из некоторого класса стоят на i -м месте ($1 \leq i \leq k$), пропорционально численности класса. Численность классов меняется в широких пределах, поэтому в "переборном" тестовом коде есть избыток одних сочетаний при нехватке других.

Генератор тестов предоставляет в этой ситуации оператор, позволяющий совместить перебор классов инструкций и случайный выбор инструкций в классе. Результатом является последовательность инструкций заданной длины, в которой все сочетания классов инструкций встречаются примерно одинаковое количество раз. Классы инструкций и вероятности их выбора задаются при помощи стандартного дерева инструкций с весами, но теперь каждое поддерево 1-го уровня в нем определяет класс инструкций. Веса внутри поддерева определяют вероятности случайного выбора инструкций в классе.

Остальные параметры оператора задают число классов в сочетаниях и число вырабатываемых инструкций. Способ перебора классов должен обеспечивать одинаковую частоту выдачи сочетаний, т. е. равномерность покрытия. Способы, при которых каждое сочетание появляется ровно один раз, как в цепочках де Брёйна, сложны в реализации. К тому же при случайном тестировании нет смысла в уменьшении числа появлений каждого сочетания, так как нужно как раз обратное. Поэтому генератор тестов использует порядок перебора сочетаний, используемый, например, для индексов многомерного массива. При этом каждое сочетание по k из m классов встречается ровно k раз, если длина последовательности $m^k + k - 1$. Поскольку число классов заметно меньше числа инструкций, тестовый код с нужными свойствами оказывается гораздо короче, чем при переборе инструкций.

Сочетания инструкций в тестовом коде отличаются от тех, которые выдает оператор псевдоязыка. Причина этого - различные вставки в код, в том числе вставка инструкций перезагрузки необходимого содержимого регистров. Ниже описаны некоторые средства, позволяющие снизить влияние перезагрузки регистров на покрытие.

3.3. Защита регистров базы

В генераторе тестов предусмотрен режим защиты регистров базы адреса. В нем регистры, выбранные в качестве базы, получают метку, которая не позволяет случайно выбирать их для записи результатов вычислений. Это обеспечивает определенную сохранность содержимого регистра для его повторного использования в качестве базы.

Адрес данных в этом режиме выбирается, как прежде, случайно, а база подбирается из регистров, содержимое которых в сумме с 16-разрядным смещением позволяет получить выбранный адрес. У режима есть параметр - минимальное число регистров, из которых можно выбирать базу. Если число подходящих регистров меньше минимума, выбирается новый регистр. Это условие обеспечивает необходимую степень случайности.

В режиме защиты регистров базы адреса, начиная с некоторого момента, перезагрузка регистров базы почти не требуется. Однако одновременно с этим уменьшается возможность получения зависимости по данным в такой тестовой ситуации, как сочетание загрузки базы и ее использования при обращении к памяти. Таким образом, режим защиты базы полезен при тестировании обмена с памятью и может мешать при тестировании конвейера. В последнем случае целесообразнее использовать механизм предзагрузки.

3.4. Предзагрузка

Механизм предзагрузки позволяет загрузить нужное содержимое в регистр заранее, вместо того, чтобы делать это непосредственно перед использованием. Это достаточно простое средство, которое снимает ряд ограничений и позволяет управлять зависимостью по данным в операции, которая использует регистр.

Предзагрузка используется в генераторе тестов для загрузки регистра базы адреса и регистра целевого адреса перехода. В первом случае, как отмечалось выше, это служит альтернативой подбору регистров базы, когда их обновление происходит слишком редко. Во втором случае это наиболее удобная возможность получать произвольные сочетания инструкций с участием регистрового перехода.

Операция предзагрузки состоит в том, что инструкции загрузки выбранного регистра добавляются в тестовый код заранее, но с возможностью замены загружаемого значения. Затем включается режим ожидания, в котором чтение и запись данного регистра запрещены. Когда встретится инструкция, для которой требуется регистр с

определенным содержимым, этот регистр и будет для нее выбран. Нужное содержимое будет использовано для коррекции инструкций загрузки регистра.

Предзагрузку можно выполнить при помощи отдельного оператора или случайной вставки. Оператор позволяет задать регистр и точное место предзагрузки, однако он может быть выполнен только по завершении предыдущего оператора. Для случайной вставки предзагрузки этого не требуется, она может выполняться нужное число раз одновременно с генерацией инструкций.

Простая конструкция, в которой используется оператор предзагрузки, это итератор, в котором многократно добавляется следующая группа инструкций:

- Предзагрузка;
- Определенное число промежуточных инструкций;
- Обращение к памяти или регистровый переход;
- Одна-две случайные инструкции, чтобы отделить следующую предзагрузку.

Случайная вставка предзагрузки может выглядеть примерно так же, если подобрать параметры вставки и относительную частоту выдачи инструкций, использующих предзагруженный регистр.

3.5. Циклы

Ускорение выполнения циклов вносит существенный вклад в повышение быстродействия процессора. Известны различные аппаратные средства, прямо или косвенно влияющие на скорость выполнения циклов. Включение циклов в случайные тесты позволяет использовать преимущества стохастических методов для тестирования этих средств. В первую очередь это относится к кэшированию инструкций и данных, а также к прогнозированию переходов.

Кэширование создает разные условия для чтения памяти на первой и последующих итерациях цикла. Чтение программы в кэш инструкций может вызывать задержки конвейера. На второй и следующих итерациях этих задержек нет, если инструкции остаются в кэше. В этих условиях передачи управления внутри цикла также могут выполняться по-разному. Аналогично при чтении памяти данных для первой итерации цикла характерны промахи в кэше. На следующих итерациях могут происходить попадания и промахи, в зависимости от политики кэширования и изменения адреса данных.

Тело цикла может содержать любые инструкции перехода, поэтому выбор той или иной инструкции условного перехода для организации цикла большого значения не имеет. В генераторе тестов оператор Loop создает цикл от N-1 до 0, причем переменная цикла хранится в специально отведенном регистре, а условие проверяется только в конце. Регистр переменной цикла может выбираться случайно. Однако если в теле цикла для каких-то инструкций задаются определенные

регистры, то во избежание конфликтов регистр переменной цикла также следует задавать.

Обеспечение корректности тестового кода в цикле сложнее, чем при линейном выполнении. Это связано с регистрами, у которых случайное изменение содержимого в теле цикла может нарушить работу цикла, корректность программы или заданные условия выполнения на второй и следующих итерациях цикла. Соответствующие регистровые аргументы инструкций - это база адреса данных, целевой адрес перехода, операнды, определяющие условие перехода CPU и FPU, делитель при целочисленном делении. Эти аргументы, как и выбранные для них регистры, назовем контролируемыми. Для контролируемых аргументов в цикле есть две возможности: либо содержимое регистра одинаково на всех итерациях, либо оно меняется по заданию пользователя.

Назовем константой в цикле значение, которое записывается в регистр в цикле и не зависит от номера итерации. Вообще говоря, любая операция может вырабатывать константу в цикле, если величины, от которых зависит результат операции, сами не меняются в цикле. Использование таких условных констант не дает ощутимых преимуществ, но приводит к ограничениям на запись в регистры и память, число которых увеличивается с длиной цикла. Поэтому для генератора тестов константами в цикле считаются только величины, которые записываются в регистр при помощи непосредственных значений, адреса возврата и некоторые другие тождественные результаты.

При использовании контролируемого регистра в цикле возможны три варианта:

- A. Перед использованием в цикле не было записи в регистр. После использования случайная запись в регистр запрещена, так как иначе на следующей итерации содержимое регистра изменится непредсказуемо.
- B. Перед использованием в регистр в цикле записана константа, причем на текущем или большем уровне вложенности. После использования для регистра не возникает ограничений. Если константа записана на меньшем уровне вложенности, то после использования случайная запись в регистр запрещена, как в варианте A, пока уровень цикла не вернется к тому, на котором записана константа.
- C. Перед использованием в регистр в цикле записана не константа. Такой регистр нельзя использовать в качестве контролируемого, пока в него не будет записана константа (вариант B).

На Рис. 2 показана схема циклов с использованием контролируемого регистра. На первом уровне вложенности в регистр записывается константа. Сначала регистр используется в качестве контролируемого на втором уровне вложенности. После этого и до конца уровня случайная запись в регистр запрещена (вариант A выше). На первом уровне регистр используется еще раз, но это не вызывает запрета на запись (вариант B).

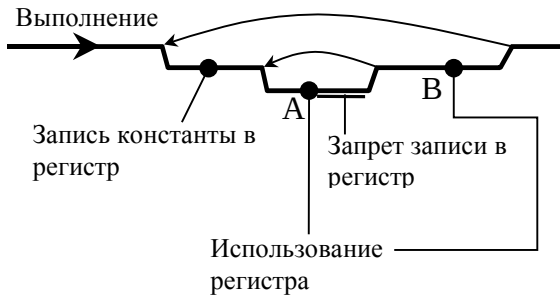


Рис. 2. Схема циклов с использованием контролируемого регистра.

Как правило, в генераторе тестов предусмотрено две попытки при выборе регистров для контролируемых аргументов. Сначала регистр выбирается для чтения при условии использования текущего содержимого. Регистры переменных цикла и другие регистры, в которые в цикле записана не константа, в выборе не участвуют. Если текущее содержимое регистров использовать не удалось, потребуется перезагрузка регистра. Поэтому во второй попытке выбираются регистры, в которые разрешена запись. В некоторых частных случаях выбор упрощен. Так, при выработке условия перехода FPU в цикле в качестве результата допускаются только константы. Запрещать случайную запись в бит условия нежелательно, но ее последствия легко ликвидируются.

Как следует из приведенных правил выбора, при генерации цикла может возникнуть критическая ситуация с нехваткой регистров на запись. Для этого необходимо в начале цикла сделать все свободные регистры контролируемыми, с запретом на запись. Такую ситуацию можно создать, выполняя в начале цикла только сохранение в память и, возможно, условные переходы. Соответственно, чтобы избежать нехватки регистров, достаточно в начале цикла записать несколько регистров путем выполнения арифметических инструкций.

Заданное изменение контролируемых регистров, в отличие от случайного, разрешено. Это можно использовать для базы адреса данных, с целью получить в цикле обращение к памяти по разным адресам. Корректность здесь обеспечивает пользователь. Инкремент базы должен выбираться так, чтобы адрес оставался в области памяти на всех итерациях цикла.

Приведем пример фрагмента программы построения теста, в котором генерируется цикл с чтением памяти данных с переменным адресом. Назначение операторов и смысл обозначений подробно описаны ниже.

```
xargs (rs=r4=N1)      // Загрузка r4
add ()
loop (r1, N2) {       // Начало цикла,
                      // r1 = N2-1
  xargs (offset=0, rb=r4)
  lw ()               // Чтение памяти
                      // по адресу r4
  group (N3) {...}    // Другие инструкции
```

```
xargs (rt=r4, rs=r4, immed=N4)
addiu ()              // Инкремент адреса
group (N5) {...}      // Другие инструкции
}                     // Конец цикла
```

Здесь регистр r4 используется в качестве базового, а регистр r1 - в качестве переменной цикла. Необходимо выбрать регистры заранее, чтобы они не совпадали, а базовый регистр можно было инкрементировать. Содержание действий этого фрагмента следующее:

- Перед циклом в базовый регистр r4 записывается N1 - заданный адрес памяти для первой итерации цикла. Для этого используется предоставляемая языком возможность задать перед операцией регистр и его содержимое. Сама операция (здесь - сложение) выбирается произвольно.
- Оператор loop организует цикл на N2 итераций, регистр r1 предназначен для переменной цикла.
- Инструкция lw загружает из памяти слово по адресу, лежащему в r4. Загрузка сделана первой операцией в цикле, чтобы случайная запись в регистр r4 не испортила адрес. Использование регистра r4 в качестве базы адреса приводит к запрету на случайную запись в него до конца цикла.
- Оператор group добавляет в код N3 инструкций, случайно выбираемых в дереве инструкций с весами, которое задается в операторе. Само дерево здесь не приводится, чтобы не загромождать схему. В этих инструкциях r4 может свободно выбираться на чтение, в том числе для контролируемых аргументов. Поскольку далее r4 инкрементируется, лучше исключить из дерева инструкции обращения к памяти и условного перехода.
- Базовый регистр r4 инкрементируется на величину N4.
- Оператор group добавляет в код N5 инструкций. Те же возможности, что в предыдущем операторе group.

Согласно этой схеме, в цикле будет происходить чтение слова памяти по адресам от N1 до $N1 + (N2 - 1) * N4$, с шагом N4. Распределение памяти должно быть таким, чтобы все эти адреса принадлежали области с разрешенным чтением, иначе генератор выберет для инструкции lw другие аргументы.

В этом примере адрес и некоторые аргументы задаются явно, а загрузка должна быть первой операцией цикла. От части этих ограничений можно избавиться. Так, первый адрес чтения памяти может быть выбран случайно, если обеспечить допустимость адресов памяти в цикле с учетом инкрементирования. Так как случайный адрес выбирается вблизи границы между блоками памяти, нужно задать достаточно большой размер блока, а начало и конец области памяти поместить в середине блока. Например, в текущей версии генератора самым подходящим размером блока является 4 Кбайт, и если границы областей берутся в виде $(4n+2)$ Кбайт, то расстояние от случайного адреса до границы области будет порядка 2

Кбайт. Это вполне достаточный запас для инкрементирования адреса в цикле.

Чтобы случайный адрес был записан в регистр перед циклом, нужно использовать оператор `preload`. Между началом цикла и чтением памяти можно добавить любые инструкции, кроме обращений к памяти, без риска испортить регистр базы. После чтения памяти все остается, как и раньше. Новый вид фрагмента программы:

```
preload (data, r4)      // Место загрузки r4
loop (r1, N2) {        // Начало цикла,
                        // r1 = N2-1
    group (N6) {...}    // Другие инструкции
    lw ()               // Чтение памяти
                        // по адресу r4
    group (N3) {...}    // Другие инструкции
    xargs (rt=r4, rs=r4, immed=N4)
    addiu ()            // Инкремент адреса
    group (N5) {...}    // Другие инструкции
}                       // Конец цикла
```

Как можно видеть из этого примера, разработка шаблонов, в которых заданные и случайные действия используются вместе, требует особого контроля за тем, чтобы случайные действия оставались корректными.

Это приводит к необходимости создания типовых шаблонов и средств генерации шаблонов

4. Заключение

Применение генераторов случайных тестов, при всей его простоте, требует хорошего понимания процесса генерации, построения тестового кода и выбора аргументов инструкций. Правильный выбор управляющих параметров особенно важен при тестировании, ориентированном на составляющие проекта. Одним из средств автоматизации построения теста служит встроенный симулятор, в котором не моделируется окружение теста - среда вызова и обработчики исключительных ситуаций. Это позволяет создавать тесты без использования информации об окружении теста и с определенной независимостью от его свойств. В связи с усложнением возможностей генератора тестов в дальнейшем необходимо развивать средства управления генерацией, создавать типовые шаблоны и средства генерации шаблонов.

Random test generator with restricted simulation

A.S. Koutsaeв

Abstract: The advantage of random test generators is the simplicity of use. Stochastic testing can detect both ordinary and specific errors (due to rarely occurred combinations and defects of specification). When creating tests that are intended to verify the components of the project, one has to set many control parameters of the generator. This induces the necessity of the automation and the improvement of the target device model. A helpful instrument that improves the creation of tests is a specialized built-in simulator. Its application removes some limitations, e.g. using loops when testing the facilities of acceleration. A further improvement of random test generators forces to the automation of the development of templates.

Keywords: verification, coverage, random tests, template, simulator.

Литература

1. J. Bergeron. Writing Testbenches: Functional Verification of HDL Models. Kluwer Academic Publishers, 2000. 354 p.
2. И.Ш. Хисамбеев. Роль стохастического тестирования в функциональной верификации микропроцессоров. Программные продукты и системы 2012, №3, с. 107-112.
3. И.В. Грибков, А.В. Захаров и др. Стохастическое тестирование в системе INTEG. Программные продукты и системы. 2007, № 2, с. 22–26.
4. И.В. Грибков, А.В. Захаров и др. Развитие системы стохастического тестирования INTEG. Программные продукты и системы 2010, №2, с. 14-22.

Моделирование распределения поверхностного потенциала в двух затворных симметричных КНИ КМОП нанотранзисторах с гауссовым вертикальным профилем легирования

Н.В.Масальский

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail: volkov@niisi.ras.ru

Аннотация: Обсуждается подход моделирования распределения поверхностного потенциала в рабочей области для симметричного двух затворного КНИ КМОП нанотранзистора с вертикальным гауссовым профилем легирования в рабочей области. Модель базируется на аналитическом решении 2D уравнения Пуассона. Численно рассчитаны распределения поверхностного потенциала для разных параметров профиля легирования.

Ключевые слова: симметричный двух затворный КНИ КМОП нано транзистор, 2D уравнение Пуассона, поверхностный потенциал, гауссовый профиль легирования

Введение

Развитие методов схемотехнического моделирования полупроводниковых приборов связано с совершенствованием моделей транзисторов, одним из направлений которого является включение новых физических аспектов в уже известные модели. Здесь можно привести пример классического предположения о равномерном распределении концентрации легирующей примеси по всей глубине канала (рабочей области) транзистора. Однако, на современном этапе развития технологии это допущение уже неверно [1, 2]. Реальные КМОП транзисторы характеризуются наличием гауссового профиля распределения легирующей примеси в канале из-за требования ряда операций имплантации и диффузии во время процесса изготовления [1]. Таким образом, моделирование основных характеристик транзистора, в частности распределения потенциала в рабочей области, с учетом гауссова профиля легирования может обеспечить более адекватные физические характеристики реальных КМОП транзисторов [2, 3].

В настоящей работе для симметричного двух затворного КНИ КМОП транзистора, структура которого схематично представлена на рисунке 1, анализируется следующая задача. Ищется аналитическое выражение для распределения поверхностного потенциала с учетом гауссова профиля легирования рабочей области вдоль вертикальной оси x . Пик профиля, как предполагается, расположен в середине толщины рабочей области с параметрами профиля: R – радиус и σ_d – крутизна профиля, соответственно. Для того чтобы получить искомое аналитическое выражение

решается 2D уравнение Пуассона с соответствующими граничными условиями.

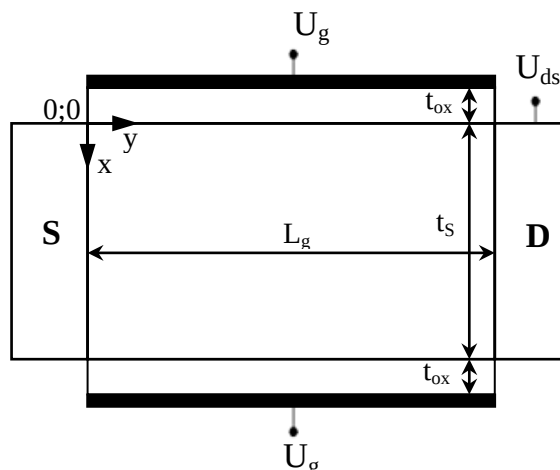


Рис.1. Схема симметричного двух затворного КНИ КМОП транзистора

Для того чтобы получить искомое аналитическое выражение решается 2D уравнение Пуассона с соответствующими граничными условиями. На основе полученного решения численно анализируется влияние крутизны профиля на распределение поверхностного потенциала.

В перспективе применение заданного гауссова профиля легирования может помочь в решении проблемы подавления коротко-канальных эффектов [3, 4]. Следует отметить, что практически все современные аналитические модели двух затворных симметричных КНИ нанотранзисторов не учитывают эффект гауссова профиля легирования рабочей области [2, 5, 6].

1. Постановка задачи

Ищется аналитическое решение для классического 2D уравнения Пуассона, которое, как известно, традиционно используется для анализа распределения потенциала в рабочей области транзистора:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{qN_A(x)}{\varepsilon_s}, \quad (1)$$

где q – заряд электрона, $\varphi(x, y)$ – потенциал в рабочей области транзистора, ε_s – диэлектрическая проницаемость рабочей области, $N_A(x)$ – концентрация легирования рабочей области. Для решения (1) используются классические граничные условия

$$\varphi(x, y)|_{x=0} = \varphi_s(y)$$

$$\frac{\varepsilon_{ox}}{t_{ox}}(U_g - U_{FB} - \varphi(0, y)) = -\varepsilon_s \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$\frac{\varepsilon_{ox}}{t_{ox}}(U_g - U_{FB} - \varphi(t_s, y)) = -\varepsilon_s \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=t_s}$$

$$\varphi(x, 0) = U_{bi}$$

$$\varphi(x, L_g) = U_{bi} + U_{ds}$$

где $\varphi_s(y)$ – поверхностный потенциал, ε_{ox} – диэлектрическая проницаемость подзатворного окисла, t_{ox} – толщина подзатворного окисла, U_g – напряжение на затворах, U_{FB} – напряжение плоских зон, U_{bi} – встроенная разность потенциалов, t_s – толщина рабочей области транзистора, L_g – длина затвора, U_{ds} – напряжение сток-исток.

И в рассматриваемом случае форма распределения примеси $N_A(x)$, легирующая рабочую область, описывается функцией

$$\text{Гаусса: } N_A(x) = N_{pick} \exp\left(-\left(\frac{x - R_d}{\sqrt{2}\sigma_d}\right)^2\right), \quad \text{где}$$

N_{pick} – максимальная концентрация легирующей примеси.

2. Свойства гауссова профиля легирования

На рисунке 2 приведены типичные распределения профиля легирования (функция Гаусса) по глубине рабочей области (в ортогональной плоскости) симметричной КНИ транзисторной структуры при ее фиксированной толщине.

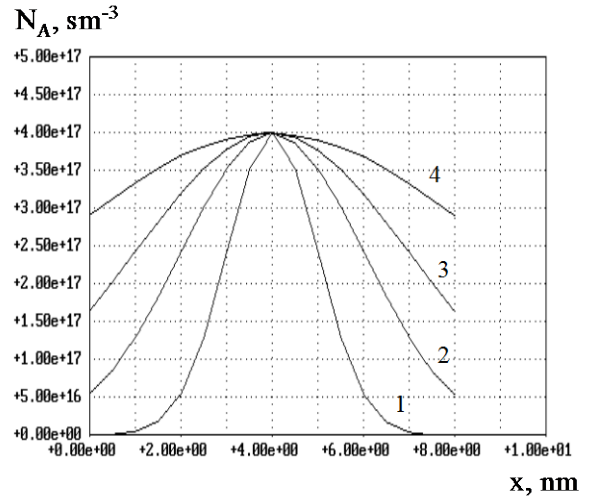


Рис. 2. Распределение профиля легирования по глубине рабочей области транзистора при $t_s=8$ нм

для разной крутизны профиля, где 1 - $\sigma_d = 1$ нм, 2 -

$\sigma_d = 2$ нм, 3 - $\sigma_d = 3$ нм, 4 - $\sigma_d = 5$ нм

Следует отметить, что уровень приповерхностной концентрации легирования (например, $N_A(0)$) существенно зависит от величины параметра σ_d . Рисунок 3 иллюстрирует зависимость $N_A(0)$ от σ_d при $N_{pick} = 4 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Зависимость $N_A(t_s)(\sigma_d)$ имеет такой же вид.

В области малых значений σ_d приповерхностная концентрация может отличаться более чем на порядок от максимальной. При этом протяженность этих областей (у верхнего и нижнего затворов) вдоль оси x (по глубине рабочей области) является конечной. Например, при $\sigma_d = 1$ нм протяженность этих областей составляет примерно 1.9 нм, а приповерхностная концентрация отличается на 3 порядка от максимальной. Это определяет предпосылку для рассмотрения данного случая в рамках низколегированного приближения. Следует отметить, что при уменьшении толщины t_s спад параметра $N_A(0)$ замедляется. Для получения тех же концентраций необходимо уменьшать σ_d пропорционально отношению толщин. В области больших значений σ_d отношение $N_A(0)/N_{pick} \rightarrow 1$, т. е. начиная с некоего значения t_s приближенно можно считать рабочую область равномерно легированной. При этом данное значение практически не зависит от толщины рабочей области.

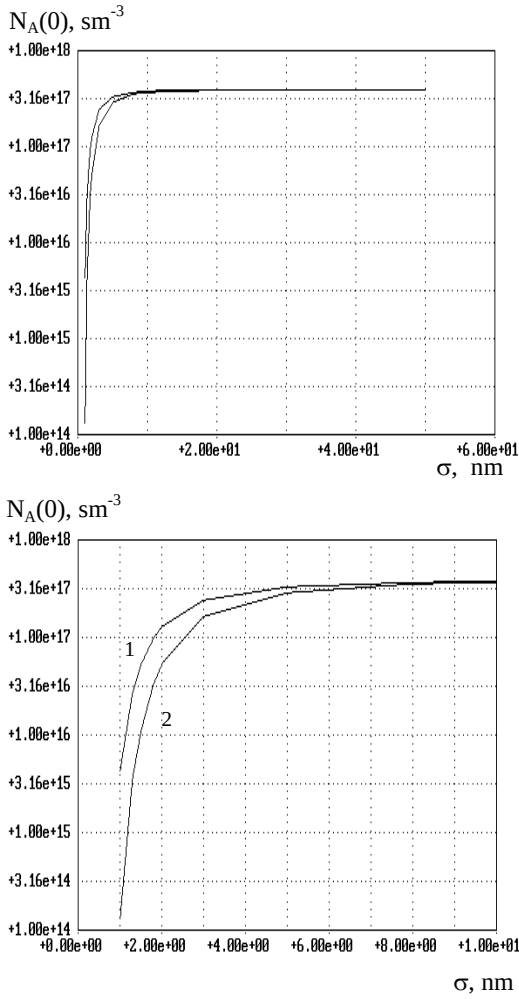


Рис. 3. Зависимость приповерхностной концентрации носителей в рабочей области от крутизны профиля легирования, где на верхнем рисунке общий вид для

$\sigma_d = 1 \dots 50$ nm,

на нижнем рисунке для $\sigma_d = 1 \dots 10$ nm,

здесь 1 - $t_s = 6$ nm, 2 - $t_s = 8$ nm

3. Метод решения уравнения Пуассона

Переходя к новой координате по x , при помощи ввода новой переменной $\tau = \frac{x - R_d}{\sqrt{2}\sigma_d}$ получаем

следующее уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{2\sigma_d^2} \frac{\partial^2 \varphi(\tau, y)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\tau, y)}{\partial y^2} = \frac{qN_{pick}}{\varepsilon_s} \exp(-\tau^2) \quad (2)$$

и новые граничные условия

$$\varphi(\tau, y) \Big|_{\tau=x_f} = \varphi_s(y)$$

$$\frac{\varepsilon_{ox}}{t_{ox}} (U_g - U_{FB} - \varphi(x_1, y)) =$$

$$= -\frac{\varepsilon_s}{\sqrt{2}\sigma_d} \frac{\partial \varphi(\tau, y)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=x_1}$$

$$\frac{\varepsilon_{ox}}{t_{ox}} (U_g - U_{FB} - \varphi(x_2, y)) =$$

$$= -\frac{\varepsilon_s}{\sqrt{2}\sigma_d} \frac{\partial \varphi(\tau, y)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=x_2}$$

$$\varphi(\tau, 0) = U_{bi}$$

$$\varphi(\tau, L_g) = U_{bi} + U_{ds}$$

$$\text{где } x_1 = \frac{-R_d}{\sqrt{2}\sigma_d} \text{ и } x_2 = \frac{t_s - R_d}{\sqrt{2}\sigma_d}$$

Решение уравнения Пуассона ищем в классическом виде:

$$\varphi(\tau, y) = C_0(y) + C_1(y)\tau + C_2(y)\left(\operatorname{erf}(\tau) + \frac{\exp(-\tau^2)}{\sqrt{\pi}}\right), \quad (3)$$

где $C_0(y), C_1(y), C_2(y)$ - произвольные функции, для определения которых необходимо использовать уже новые граничные условия. Функция

$$\operatorname{erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \exp(-t^2) dt$$

- интеграл вероятности (интеграл ошибок) является, как известно, одной из наиболее используемых в теории и практике специальных функций (см., например, [7-10]). Это связано с тем, что данная функция непосредственно связана с нормальным (гауссовым) распределением случайной величины. Во многих случаях функция $\operatorname{erf}(\tau)$ является адекватной моделью многих процессов, происходящих в живой природе и искусственной среде. Описание функции интеграла вероятностей либо ее таблиц включено в большинство известных справочников и монографий, посвящённых специальным математическим функциям.

Применяя новые граничные условия, выражение для функций $C_0(y), C_1(y), C_2(y)$ входящих в выражение для потенциала можно записать в виде

$$C_0(y) = U_g - U_{FB} + \xi_1 C_2(y)$$

$$C_1(y) = -\xi_0 C_2(y) \quad (4)$$

$$C_2(y) = \frac{\varphi_s(y) - U_g + U_{FB}}{\xi_1 - x_1(\xi_0 - \operatorname{erf}(x_1)) + \frac{\exp(-x_1^2)}{\sqrt{\pi}}}$$

где

$$\xi_0 = \frac{x_0}{2} \frac{(erf(x_1) + erf(x_2)) + x_2 erf(x_2)}{x_2 - x_1 + x_0} - \frac{x_1 erf(x_1) + \frac{\exp(-x_2^2)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\exp(-x_1^2)}{\sqrt{\pi}}}{x_2 - x_1 + x_0},$$

$$\xi_1 = (x_2 + \frac{x_0}{2})(\xi_0 - erf(x_2)) - \frac{\exp(-x_2^2)}{\sqrt{\pi}},$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{2t_{ox}}\varepsilon_s}{\sigma_d\varepsilon_{ox}}$$

Для определения поверхностного потенциала необходимо решить уравнение Пуассона на границе кремний-окисел, которое можно представить, например, в виде

$$\frac{1}{2\sigma_d^2} \frac{\partial^2 \varphi(\tau, y)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=x_1} + \frac{\partial^2 \varphi(\tau, y)}{\partial y^2} \Big|_{x=x_1} = \frac{qN_{pick}}{\varepsilon_s} \exp(-\tau^2) \Big|_{x=x_1} \quad (5)$$

Решение, которого можно представить так

$$\varphi_s(y) = C_{0_s} \exp(y/l) + C_{1_s} \exp(-y/l) + U_g - U_{FB} - \frac{qN_{pick} \exp(-x_1^2)}{2\varepsilon_s} l^2, \quad (6)$$

где

$$l = \sqrt{\pi} \sigma_d^2 \left(\frac{x_1(\xi_0 - erf(x_1)) - (\xi_1 + \frac{\exp(-x_1^2)}{\sqrt{\pi}})}{\exp(-x_1^2)} \right)$$

- характеристическая длина и C_{0_s} и C_{1_s} - произвольные константы.

Используя граничные условия, описанные соотношениями (4), и подставив их в уравнение (6) выражение для C_{0_s} и C_{1_s} можно получить в виде

$$C_{0_s} = u_1 - l_1 U_g$$

$$C_{1_s} = u_2 - l_2 U_g$$

где

$$u_1 = \frac{U'_{bi} (\exp(-L_{eff}) - 1) - U_{ds}}{\exp(-L_{eff}) - \exp(L_{eff})},$$

$$u_2 = \frac{U'_{bi} (\exp(L_{eff}) - 1) - U_{ds}}{\exp(L_{eff}) - \exp(-L_{eff})},$$

$$l_1 = \frac{\exp(-L_{eff}) - 1}{\exp(-L_{eff}) - \exp(L_{eff})}$$

$$l_2 = \frac{\exp(L_{eff}) - 1}{\exp(L_{eff}) - \exp(-L_{eff})},$$

$$U'_{bi} = U_{bi} + U_{FB} + \frac{qN_{pick} \exp(-x_1^2)}{2\varepsilon_s} l^2,$$

$$L_{eff} = L_g / l$$

4. Результаты моделирования

Ниже представлены результаты моделирования распределения поверхностного потенциала для прототипа симметричного двух затворного КНИ КМОП нанотранзистора с параметрами: $L_g = 45$ нм, $t_s = 8$ нм, $t_{ox} = 2.5$ нм, $N_{pick} = 4 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $U_{bi} = 0.868$ В.

На рис 4 приведены расчетные зависимости распределения поверхностного потенциала при разных значениях крутизны профиля легирования и фиксированными напряжениями на затворах и стоке и истоком. Результаты моделирования показывают, что с повышением крутизны профиля существенно меняется форма распределения и увеличивается значение минимума поверхностного потенциала. Это влечет снижение барьера канала, что может отразиться на токе утечки и пороговом напряжении.

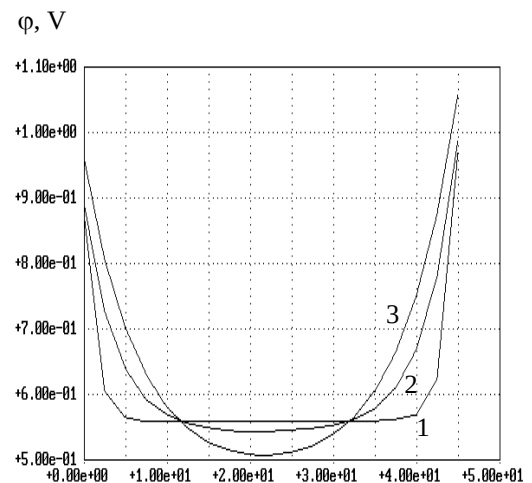


Рис. 4. Распределение поверхностного потенциала по длине рабочей области при разных значениях σ_d крутизны, где 1 - $\sigma_d = 1$ нм, 2 - $\sigma_d = 3$ нм, 3 - $\sigma_d = 5$ нм, при $U_{ds} = 0.1$ В, $U_g = 0.3$ В.

На рисунке 5 представлены зависимости распределения поверхностного потенциала при разных уровнях напряжения на затворе и постоянном напряжении между стоком и истоком.

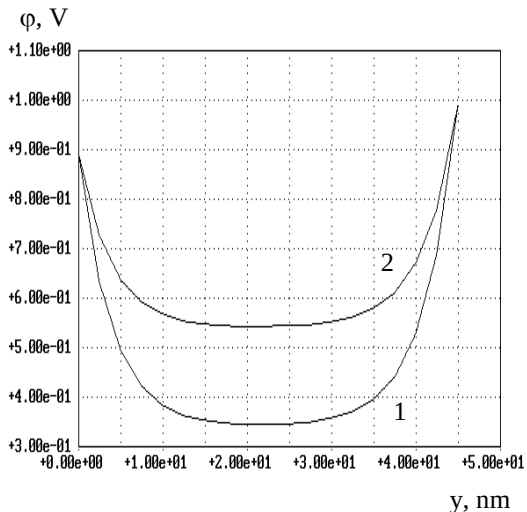


Рис. 5. Распределение поверхностного потенциала по длине рабочей области при разных напряжениях на затворах, где 1 - $U_g=0.1$ В, 2 - $U_g=0.3$ В, при $U_{ds}=0.1$ В, $\sigma_d = 3$ нм

Из данных результатов следует, что минимум поверхностного потенциала также пропорционально зависит от напряжения на затворах.

Риснок 6 иллюстрирует характерную зависимость сдвига минимума поверхностного потенциала $\Delta\varphi$, где

$$\Delta\varphi = \varphi_{\min}(U_{g_2}) - \varphi_{\min}(U_{g_1}), \quad \text{вызванного}$$

изменением напряжения на затворах, от крутизны профиля легирования рабочей области. Для крутых профилей с малыми значениями σ_d (в нашем случае меньше 2) величина сдвига практически постоянна. С ростом σ_d значение $\Delta\varphi$ уменьшается практически по параболическому закону. В нашем случае зависимость следующая:

$$\Delta\varphi = 0.2 - 0.001556(\sigma_d - 2)^2.$$

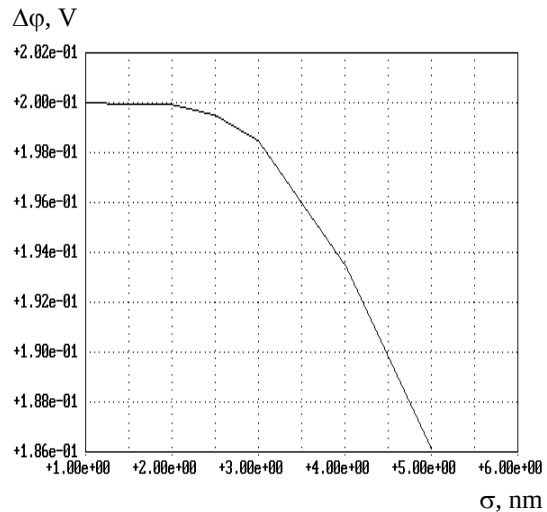


Рис. 6. Зависимость сдвига минимума поверхностного потенциала от σ_d при $\Delta U_g = 0.2$ В и $U_{ds}=0.1$ В

Заключение

Проанализирован подход для моделирования распределения поверхностного потенциала в рабочей области для симметричного двух затворного КНИ КМОП транзистора с вертикальным гауссовым профилем легирования в рабочей области. Модель основана на аналитическом решении 2D уравнения Пуассона. Численно рассчитаны распределения поверхностного потенциала для разных параметров профиля легирования. Рассмотрено их влияние на распределение поверхностного потенциала. Разработанная модель может найти применение для моделирования подпороговых характеристик и расчета порогового напряжения симметричного двух затворного КНИ КМОП транзистора, где гауссовой профиль легирования профиля будет создан искусственно или, как ожидают, это произойдет из-за ряда операций имплантации, используемых во время процесс изготовления.

Simulation of surface potential distribution for double gate symmetric SOI CMOS nanotransistors with a Gaussian vertical doping profile

N.V.Masalsky

Abstract: The solution of the simulation task of surface potential distribution in work area for the symmetric double gate SOI CMOS nanotransistor with a vertical Gaussian doping profile in work area is discussed. The model is based on the analytical solution 2D Poisson equation. Numerically distributions of surface potential for different parameters of a doping profile are calculated.

Keywords: symmetric double gate SOI CMOS nanotransistor, 2D Poisson's equation, surface potential, gaussian doping profile

Литература

1. URL: [http://public.itrs.net/International technology roadmap for semiconductor 2014 edition](http://public.itrs.net/International%20technology%20roadmap%20for%20semiconductor%202014%20edition). (дата обращения 17.11.2014).
2. A. Cerdeira, B. Iñiguez, M. Estrada. Compact model for short channel symmetric doped double-gate MOSFETs. «Solid-State Electronics». v. 52(2008), № 4, 1064-1071.
3. Н.В. Масальский. Оптимизация параметров двух затворных суб-20 нм КНИ КМОП транзисторов с архитектурой «без перекрытия». «Микроэлектроника». т. 41(2012), № 1, 57-64.
4. G. Zhang, Z. Shao, K Zhou. Threshold voltage model for short channel FD-SOI MOSFETs with vertical Gaussian profile. «IEEE Trans. Electron Devices». т. 55(2008), №5, 803-809.
5. M. Reyboz, O. Rozeau, T. Poiroux, P. Martin, J. Jomaah. An explicit analytical charge based model of undoped independent Double-Gate MOSFET. «Solid-State Electronics». v. 50(2006), № 5, 1276-1285.
6. R.K. Sharma, R. Gupta, M. Gupta, R.S. Gupta. Graded channel architecture: the solution for misaligned DG FD SOI n- MOSFETs. «Semiconductors Science Technology». v. 23(2008), № 11, 75041-75051.
7. Г. Корн, Т. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Физматгиз, 1978.
8. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., Наука, 1981.
9. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., Наука, 1964.
10. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., Наука, 1983.

Технологические особенности тестирования интегральных микросхем в полимерных корпусах подтипа 44 по ГОСТ 17467-88

С.А. Кизиев¹, С.В. Седов², К.К. Смирнов³, А.Г. Сухов⁴, А.С. Цимбалов⁵

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail's : ¹s-kiz@mail.ru, ²Sergey_Sedov@srisa.ru, ³Konstantin_Smirnov@srisa.ru ,
⁴Aleksey_Sukhov@srisa.ru, ⁵Andrey_Tsimbalov@srisa.ru

Аннотация: В процессе проверки электрических и функциональных характеристик интегральных микросхем в полимерных корпусах с жёсткими формованными выводами возникла проблема катастрофически увеличившегося износа оснастки на некоторых партиях микросхем. Причина заключалась в повышенной шероховатости контактных поверхностей выводов. Шероховатость выводов ранее никогда не контролировалась и претензий по качеству не вызывала. Признание таких партий бракованными, с одной стороны невозможно, так как требование контроля шероховатости отсутствует в конструкторской документации, с другой стороны - крайне невыгодно экономически. В статье рассматриваются технологические приёмы снижения шероховатости контактных поверхностей формованных выводов интегральных микросхем в полимерных корпусах подтипа 44 по ГОСТ 17467-88 и даются рекомендации по контролю этого параметра.

Ключевые слова: контактирующие устройства, шероховатость, термообработка, покрытие выводов.

ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН выпускает интегральные микросхемы 1890ВГ11Т и 1890ВЦ3Т в полимерных корпусах подтипа 44 по ГОСТ 17467-88. Этот тип корпусов имеет международное обозначение QFP 240L.

Отбраковочные испытания проводятся в нормальных климатических условиях на автоматическом сортировщике Aetrium TR 1400T перед проведением электротермотренировки. В процессе проведения испытаний микросхем 1890ВГ11Т выяснилось, что после измерения порядка 100 - 110 микросхем, резко возрастает количество браков и случаев отсутствия

контактирования. Ранее такого явления не наблюдалось.

Исследование рабочих поверхностей контактирующих устройств после испытаний 100 микросхем показало весьма значительное стирание слоя золота.

На рисунке 1 изображено взаимное положение выводов микросхем и рабочих поверхностей контактирующего устройства при проведении испытаний. Очевидно, что износу подвергается не вся рабочая поверхность ламели контактирующего устройства, а только её часть, непосредственно прижимаемая к выводу микросхемы.

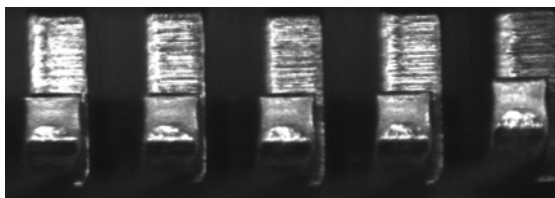


Рис. 1. Взаимное положение выводов микросхемы и ламелей контактирующего устройства

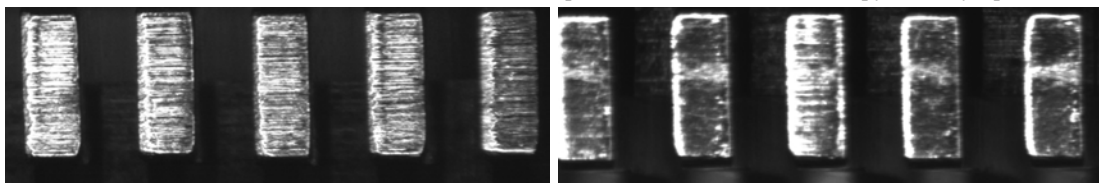


Рис. 2. Рабочие поверхности ламелей контактирующего устройства до (слева) и после испытаний

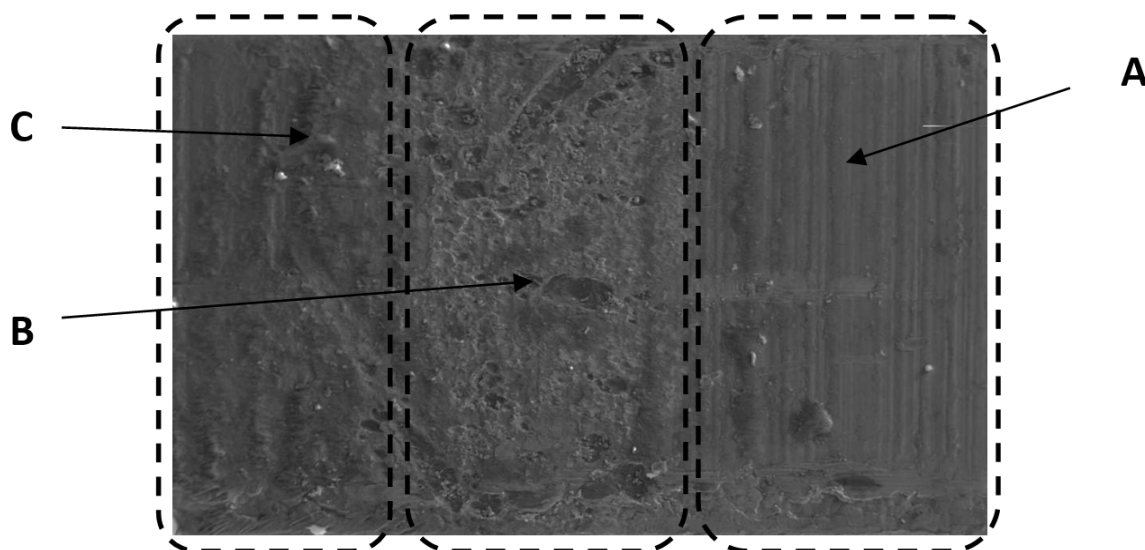


Рис 3. Электронное изображение рабочей поверхности ламели контактирующего устройства

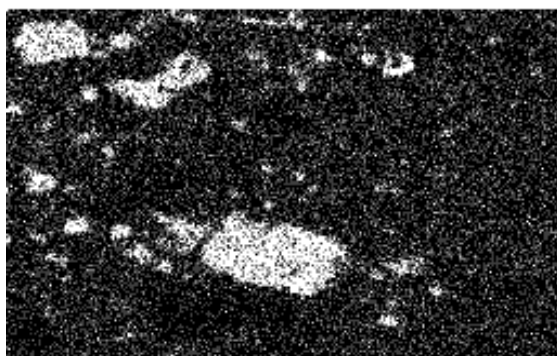


Рис. 4. Электронные изображения рабочей поверхности ламели контактирующего устройства с анализом на никель (слева) и золото (справа)

На рисунке 2 представлены изображения рабочих поверхностей контактирующего устройства до и после испытаний.

На местах прижатия выводов микросхем видно значительное изменение золотого покрытия.

На рисунке 3 представлено изображение рабочей поверхности контактирующего устройства после испытаний, полученное при помощи сканирующего электронного микроскопа LEO 1455 VP.

На рисунке отчетливо различимы три зоны. В зоне А не происходит механического контакта выводов микросхем и контактирующего устройства. Зона В - зона постоянного взаимодействия, а в зоне С происходят единичные взаимодействия из-за отклонений размеров формовки.

Сканирующий электронный микроскоп LEO 1455 VP способен определять элементный состав исследуемой поверхности. На рисунке 4 представлена зона D при большем увеличении и результатом анализа состава по никелю и золоту. Места с большим количеством данного элемента на поверхности изображены более светлыми.

Представленная информация позволяет сделать вывод, что золотое покрытие контактной ламели контактирующего устройства местами стёрто и обнажило подслоя никеля. На рисунке 5 представлены аналогичные электронные изображения с анализом на содержание олова и кислорода.

Эти анализы показывают, что происходит перенос олова с выводов микросхем на контактные ламели и последующее его окисление.

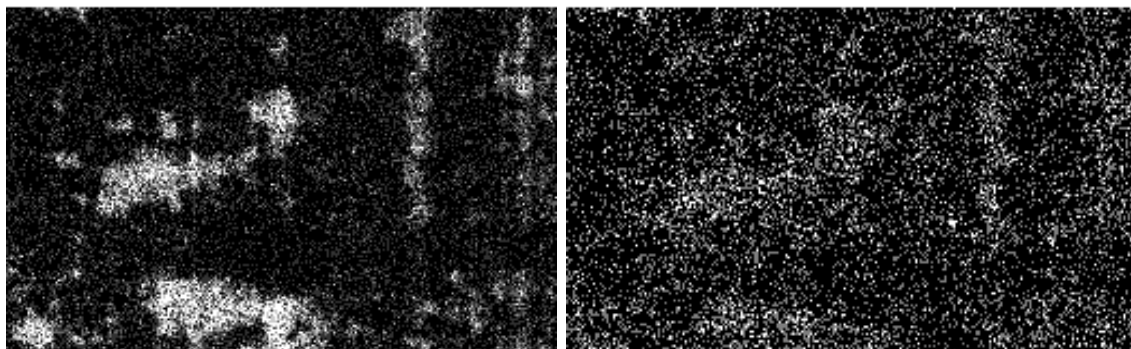


Рис. 5. Электронные изображения рабочей поверхности ламели контактирующего устройства с анализом на олово (слева) и кислород (справа)

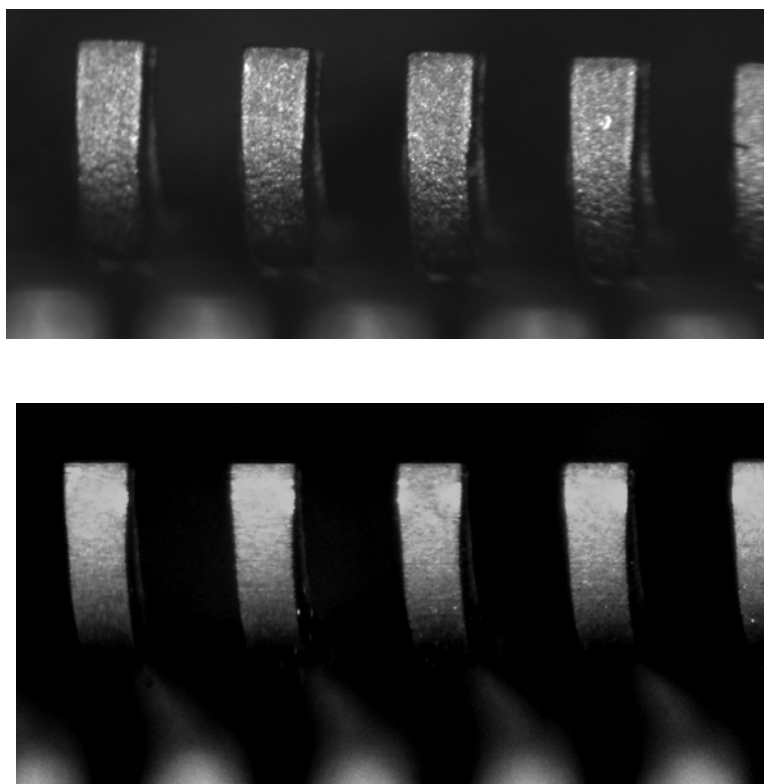


Рис. 6. Фотографии выводов микросхем. Сверху с высокой шероховатостью, снизу обычного качества.

Образование такого сложного многослойного контактного перехода между выводами микросхем и ламелями контактирующего устройства неминуемо приводит к увеличению его сопротивления. Это, в свою очередь, искажает результаты измерений при испытаниях микросхем. Следует отметить, что переходное сопротивление влияет не только на достоверность результатов измерения статических электрических параметров, но и влияет на высокочастотные функциональные тесты за счёт изменения задержек сигналов.

Все описанные обстоятельства заставили обратить внимание на шероховатость контактных поверхностей выводов самих микросхем.

Фотографии на рисунке 6 получены при увеличении 10х на оптическом микроскопе SX45/S/4. На фотографиях рисунка 6 отчётливо видно, что шероховатость поверхности выводов микросхем из предыдущих партий заметно ниже, чем у проблемной партии. Исследование состава выводов на глубину около 10 МКМ, показало наличие олова практически без примесей.

Для более детального исследования состояния поверхностей выводов микросхем были получены электронные изображения их поперечных срезов при увеличении 10000х. На рисунке 7 отчетливо видна разница в расстояниях

между пиками и впадинами слоя олова. Для микросхем проблемной партии (слева) она составляет 7 мкм, и 2 мкм для партии обычного качества (справа).

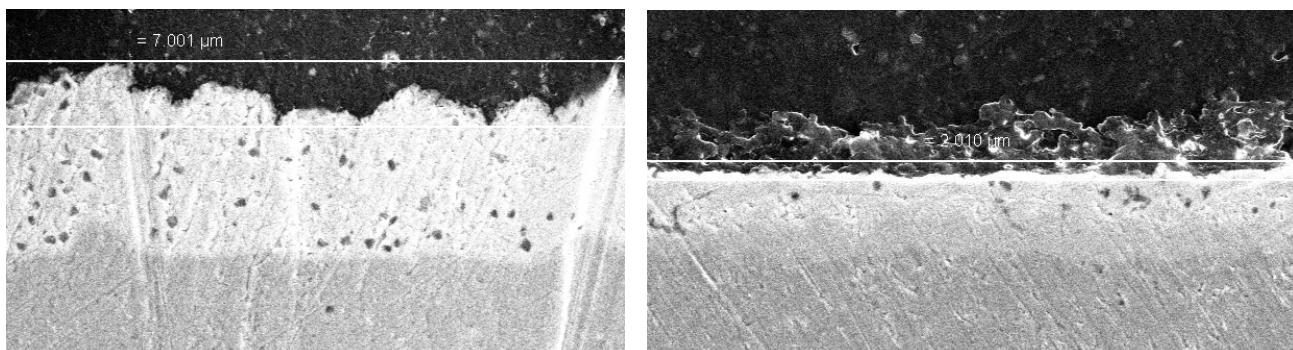


Рис. 7. Расстояние между впадинами и выступами поверхности выводов в поле зрения. Проблемная партия слева

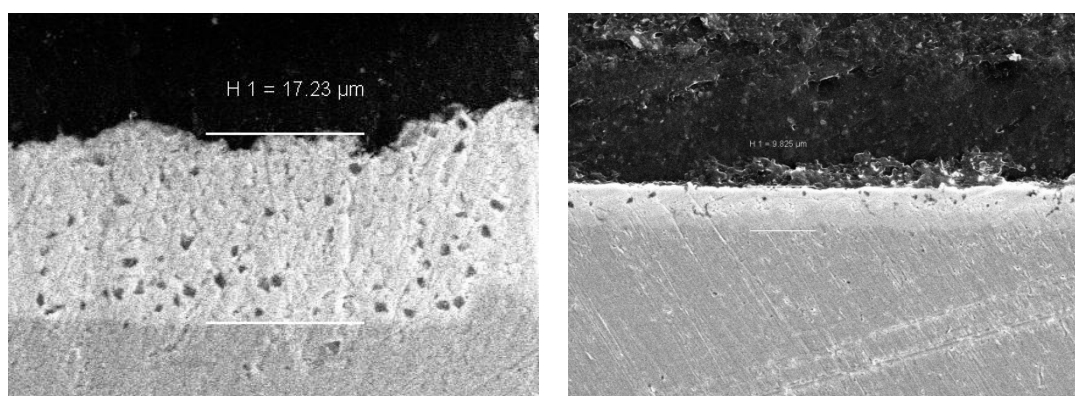


Рис. 8. Различия в толщинах слоя олова. Проблемная партия слева

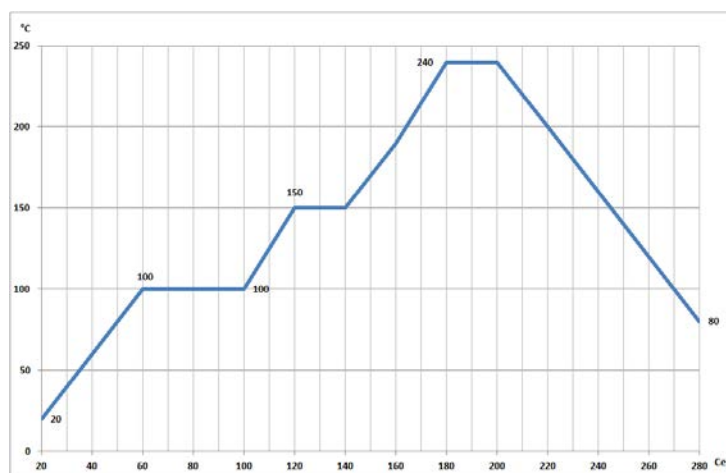


Рис. 9. Температурный профиль термообработки микросхем.

На рисунке 8 хорошо видно, что эти партии имеют также различное по толщине оловянное покрытие. Толщина покрытия для партии обычного качества составляет 9 мкм, для проблемной партии - более 17 мкм.

Так как слой олова достаточно велик, для оперативного решения проблемы быстрого износа контактирующих устройств, было

предложено провести термообработку микросхем при температуре 240 °C. Смысл этой операции в повторном прохождении слоя олова на выводах через фазу расплава с последующим медленным застыванием. В эксперименте использовалась печь конвекционного оплавления Ersa HOTFLOW2/14. При термообработке использовался рекомендованный в [1,2]

температурный профиль для безсвинцовых паяльных паст, изображенный на рисунке 9.

Для предотвращения окисления слоя олова при термообработке необходимо использовать флюс. Технологическая цепочка ФГУ ФНЦ

НИИСИ РАН ориентирована на применение водосмываемого флюса и установки струйной отмытки Riebesam 23-03T. Используется раствор на основе моющей жидкости жидкости AQUANOX A4241.



Рис. 10. Участок выводов идеального качества после термообработки

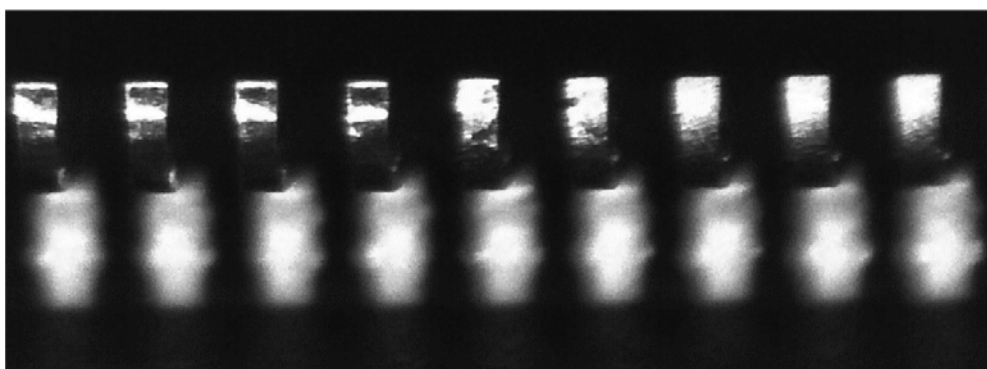


Рис. 11. Участок выводов после термообработки с разным качеством поверхности

С целью снижения продолжительности операции и минимальных изменений технологии относительно принятой для термообработки микросхем в корпусах BGA680, [3], выбирался водосмывной флюс. После проведения сравнительного анализа целого ряда флюсов такого типа, был выбран INDIUM WF 9942. Сравнение проводилось по критерию наилучшего удаления остатков флюса после термообработки. Особо следует отметить сложность нанесения флюса, вызванную малыми размерами выводов микросхем. Нанесение флюса проводилось в несколько этапов с промежуточной выдержкой около минуты при помощи пневматического дозатора.

Шероховатость контактных поверхностей выводов представлена на рисунке 10. Блестящая поверхность свидетельствует о весьма существенном снижении шероховатости.

Однако такая картина наблюдалась не на всех выводах всех микросхем. В ряде случаев часть выводов не приобретала характерного блеска. На рисунке 11 это отчётливо видно. Такой результат термообработки получался не более,

чем на 30% процентах выводов. Кроме того, номера тусклых выводов практически никогда не повторялись.

Было принято решение провести функциональный контроль на выборке микросхем, объёмом 1000 шт. после термообработки.

После проведения этих испытаний, было установлено, что признаки износа контактирующих устройств после термообработки микросхем стали проявляться примерно после измерения 800 микросхем. Это соответствует примерно восьмикратному увеличению ресурса контактирующих устройств.

Ввиду того, что в процессе производства, микросхемы подвергаются функциональному контролю несколько раз, была предпринята попытка провести термообработку после электротермотренировки. Целью этого эксперимента было по возможности снизить износ контактирующих устройств при финальных проверках в диапазоне температур. Однако, в результате такой термообработки изменения шероховатости вообще обнаружено не было.

Выводы

Проведение операции термообработки интегральных микросхем в полимерных корпусах подтипа 44 по ГОСТ 17467-88 для партий с повышенной шероховатостью выводов позволило увеличить ресурс контактирующих устройств минимум в восемь раз.

Операцию входного контроля микросхем в полимерных корпусах этого типа следует дополнить визуальной оценкой шероховатости выводов. В описании образцов внешнего вида необходимо внести соответствующие критерии.

Необходимо разработать технологический процесс термообработки интегральных микросхем в этих корпусах. В случае отклонения

внешнего вида выводов микросхем от эталонного, включать операцию термообработки в маршрут для такой партии.

С целью предотвращения неоправданного снижения выхода годных микросхем, необходимо организовать своевременную замену контактирующих устройств.

Так как микросхемы серии 1890 имеют преимущественно специальное назначение, следует рассмотреть вопрос об изменении типа покрытия выводов и отказаться от чисто оловянного покрытия [4]. До изменения типа покрытия необходимо исследовать последствия вероятного фазового перехода α - олова в β - олово при испытаниях микросхем на отрицательных температурах[5].

Technological features of VLSI in plastic packages of subtype 44 of GOST 17467-88 testing

C.A. Kiziev, S.V.Sedov, K.K. Smirnov, A.G. Suchov, A.S. Tsimbalov

Abstract: A dramatic increase of equipment wear-out occurs during testing of electrical and functional parameters of microchips in plastic packages with a stiff forming of leads. The reason is in increased roughness of contacting surfaces of the leads. There were no control of roughness of the leads before nor complains concerning their quality. To declare these VLSI lots as a failed ones is, first of all, impossible due to lack of corresponding roughness requirements in the VLSI specifications and, second of all, it is disadvantageous because of economic reasons. This paper overviews technological methods of reducing the roughness of the contacting surfaces of the formed leads of VLSI in plastic packages of subtype 44 of GOST 17467-88 and gives a recommendations control of that parameter.

Keywords: sockets, roughness, baking, lead finish.

Литература

1. М.. Шмаков, А. Тиханкин. Оптимизация температурного профиля пайки оплавлением. «Технологии в электронной промышленности» '2008 г. № 1
2. Стандарт ASSOCIATION CONNECTING ELECTRONICS INDUSTRIES (The Institute for Interconnecting and Packaging Electronic Circuits) IPC/EIA J-STD-001D (Requirements for Soldered Electrical and Electronic Assemblies). Требования к пайке электрических и электронных сборок.
3. К.К. Смирнов, А.Г. Сухов, А.С. Цимбалов. Особенности применения металлополимерных корпусов BGA. «Труды НИИСи РАН» Том 3, вып. 2, М.: Изд. «НИИСи РАН», 2013 – с. 99-103.
4. DIRECTIVE 2002/95/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 27 January 2003 on the restriction of the use of certain hazardous substances in electrical and electronic equipment. Official Journal of the European Union, 13.2.2003, L 37/19
5. Химическая энциклопедия. Том. 3. М.: Изд. «Советская энциклопедия», 1992 – с. 382-639

Резервирование каналов приёма-передачи данных в коммуникационных контроллерах встроенного применения

И.М. Косарев

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail: ikosarev@cs.niisi.ras.ru

Аннотация: Предложен алгоритм настройки, инициализации и контроля физического дуплексного канала связи с Nx/Mx/1x сигнальными парами, обеспечивающий многократное резервирование передающих линий с возможностью выбора числа резервных сигнальных пар. Представленные подходы к реализации обеспечивают максимальную пропускную способность в отсутствие ошибок и высокую надёжность физического канала приёма-передачи данных с сохранением высокой пропускной способности в случае повреждений и повторяющихся ошибок одной или нескольких линий связи.

Ключевые слова: резервирование канала, дублирование линий, интерфейс приёма-передачи данных, алгоритм настройки, инициализации и контроля, кросслинк.

Современные системы на кристалле (СнК) позволяют уменьшить размеры и энергопотребление электронных комплексов и устройств, существенно расширяют их функциональность. В состав СнК интегрированы процессорные ядра, коммуникационные контроллеры разнообразных шин, интерфейсов и памяти, видеоускорители, связанных мощной производительной коммуникационной фабрикой. Задачей встроенного коммуникационного контроллера является обеспечить производительное и надёжное соединение с внешними коммуникационными узлами (коммутаторами), конечными и периферийными устройствами, а также с другими узлами вычислительной системы [1]. Повышение производительности в таких системах достигается в основном за счёт создания параллельно работающих вычислительных узлов, ядер, микропроцессоров, компьютеров. С ростом количества компонентов системы в числе важнейших выделяется задача обеспечения надёжности каналов приёма-передачи данных при сохранении высокой пропускной способности.

Большинство высокопроизводительных вычислительных архитектур из списка TOP500 [2] используют стандартизованные интерфейсы, такие как Infiniband, PCIExpress, Gigabit Ethernet, 10G и другие. Однако за последние 5 лет число систем, использующих специально разработанные, не описанные в открытых стандартах архитектуры приёма-передачи данных, неуклонно растёт. Так, достаточно сказать, что в списке на ноябрь 2015 года из первых в списке наиболее мощных 10 суперЭВМ, 9 используют проприетарный стандарт [2]. Это объясняется, в первую очередь, ограниченностью применения таких систем и их чёткой

направленностью на выполнение определённого типа задач. Кроме того, такие архитектуры не универсальны, в них не требуется обеспечивать множество служебных режимов и обеспечить обратную совместимость. Они в целом проще в реализации, массивы логики компактнее и отличаются меньшим энергопотреблением. Другими словами, такие выделенные архитектуры наиболее подходят для задач встроенного применения. Таким образом, разработка методов проектирования каналов надёжного приёма-передачи данных в составе коммуникационного узла является актуальной задачей. Дублирование или резервирование линий связи широко применяется для построения надёжных систем. Однако главный недостаток такого подхода в том, что пропускная способность резервированного канала снижается пропорционально числу дублированных линий связи. Так, при четырёхкратном резервировании, суммарная пропускная способность 4-х линий будет равна пропускной способности всего одной. Требуется разработать такой алгоритм, который в отсутствие ошибок и повреждений, использовал бы полную пропускную способность всех линий в составе канала и обеспечивал бы параллельную передачу и приём данных путём равномерного распределения пакетов данных по всем линиям в канале. В случае ошибки или нарушения целостности полного канала система должна автоматически перестроиться, исключить ошибочные или неисправные линии, выбрать оптимальный режим с резервированием и максимально возможной пропускной способностью, не допустив при этом потери полезной информации.

Обратимся к каналному и физическому уровням сетевой модели OSI [3]. Главной

особенностью реализации протокола на уровне доступа к физической среде является программируемая ширина канала с возможностью автоматической инициализации, в том числе повторной после сбоев, а также обеспечение «горячего подключения». Предполагается синхронная дифференциальная передача данных в каждом направлении. Доступен многоканальный режим Nx (N дифференциальных сигнальных пар в каждом направлении) для режима с максимальной производительностью, многоканальный резервированный режим Mx (используются M дифференциальных сигнальных пар в каждом направлении) и одноканальный резервированный 1x режим (используется 1 дифференциальная сигнальная пара в каждом направлении). Параметры N и M это целые натуральные числа. При этом справедливы следующие соотношения:

$$N = 2^i, \quad (1)$$

$$M = 2^{i-k}, \quad (2)$$

$$N > M > 1, \quad (3)$$

где i и k – любое целые натуральные числа.

Из соотношений (1), (2) и (3) следует:

$$i = \log_2 N, \quad (4)$$

$$i > k > 0, \quad (5)$$

$$k < \log_2 N. \quad (6)$$

Таким образом, используя соотношения (1)-(6) физический канал приёма-передачи данных может быть составлен из 4x/2x/1x, 8x/2x/1x, 8x/4x/1x, 16x/2x/1x, 16x/4x/1x, 16x/8x/1x линий и так далее. На нижнем физическом уровне для передачи информации по линиям связи используются методы физического кодирования, шифрования и скремблирования данных [4]. Это позволяет использовать самосинхронизацию приёмника, исключить передачу длинных последовательности единиц или нулей подряд, устранить взаимное влияние каналов друг на друга и минимизировать ошибки приема [5].

Два устройства соединяются между собой линиями связи на основе оптоволокну или медных проводников. Каналы 0-N приёмника и передатчика подключаются соответственно (0-0, M-M, N-N). Каждая дифференциальная пара в свою очередь может быть подключена как прямо, так с обратной полярностью. На рис.1 представлена схема соединения универсального устройства Nx/Mx/1x с другими устройствами Nx/Mx/1x работающими, в частности, в режимах Mx/1x с использованием двух дублирующих друг друга каналов. Таким образом, может быть обеспечена совместимость с уже разработанными контроллерами интерфейсов на основе открытых стандартов, таких как InfiniBand или RapidIO 1x/4x Serial [6].

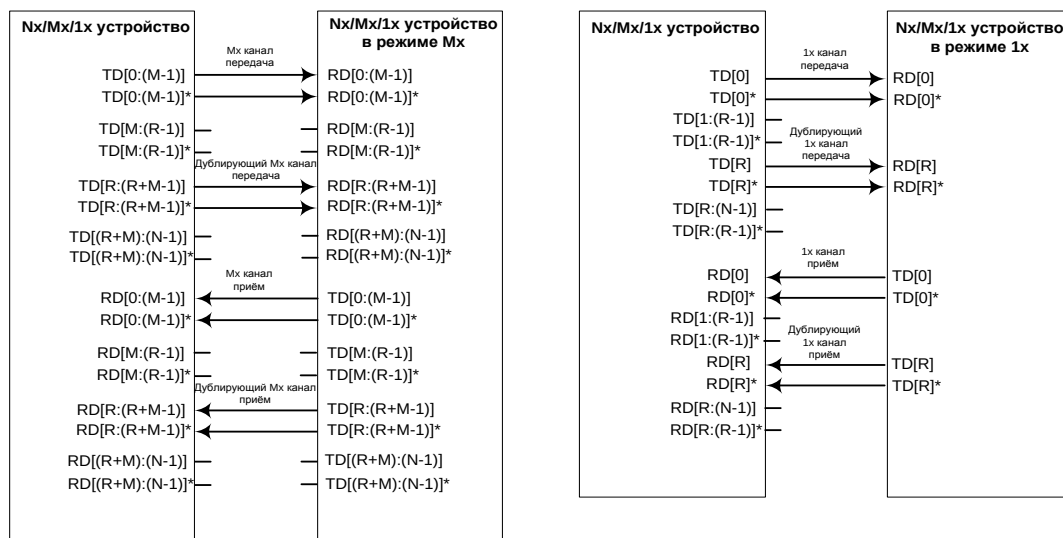


Рис.1. Схема соединения универсального устройства Nx/Mx/1x с устройством, работающим в режиме Mx/1x

Приёмник определяет подключение с обратной полярностью внутри каждой дифференциальной пары методом сравнения входных инвертированных данных с эталонными данными, входящих в состав последовательности инициализации. В случае побитной инверсии, данные поступающие по такой линии также побитно инвертируются [7]. В случае если устройство на противоположном конце линии не

поддерживает побитную инверсию входных данных, передатчик, отслеживая текущее состояние, самостоятельно инвертирует выходные данные. Таким образом, соседнее устройство получит уже правильные данные.

На рис. 2 показаны схемы соединения универсального устройства Nx/Mx/1x с устройствами, поддерживающими только отдельные режимы Nx, Mx и 1x соответственно.

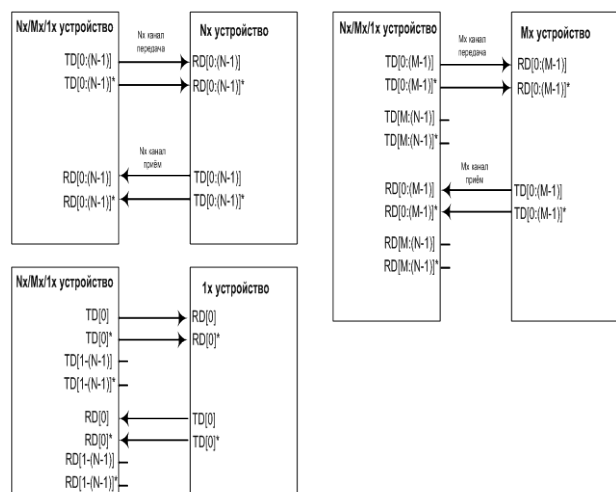


Рис. 2. Схемы соединения универсального устройства Nx/Mx/1x с устройствами, поддерживающими только отдельные режимы Nx, Mx и 1x

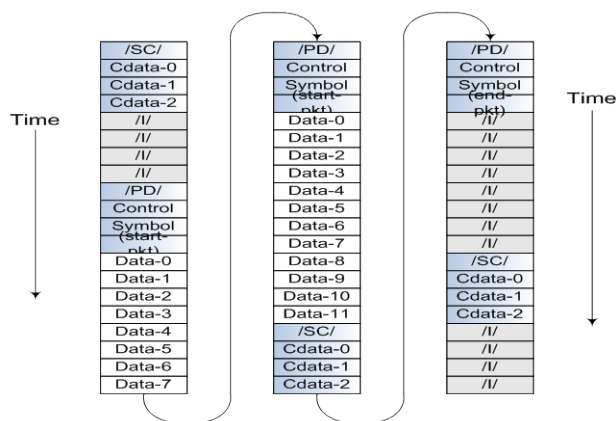
В данном случае обеспечивается, с одной стороны, совместимость канала с различными типами одно- и многоканальных архитектур, с другой стороны, в режиме Nx достигается максимальная производительность.

Для описания разработанного алгоритма инициализации и контроля, рассмотрим соединение двух Nx/Mx/1x устройств. По умолчанию на обоих устройствах используются режимы Nx. При возникновении ошибки или

повреждении линий связи алгоритм настройки и инициализации автоматически перенастраивает ширину канала так, чтобы использовать два и более Mx или 1x резервированных канала на передачу. Максимальное число резервированных каналов для режима Mx определяется

отношением $\frac{N}{M}$, а для режима 1x это число равно N. Алгоритм приёмника выбирает один из резервированных каналов связи, обеспечивающий наилучшую стабильность и минимальное число ошибок. Таким образом, обеспечивается максимальный уровень производительности при отсутствии ошибок и повреждении линий связи, а при их наличии используется режим с меньшей производительностью, но обеспечивающий максимальную надёжность. При этом для продолжения обмена данными достаточно, чтобы из всех Nx каналов на приём и передачу работоспособным был хотя бы один канал (например, канал 0 или канал R, как на рис.1) из установленного набора.

При работе описанных алгоритмов применяется механизм обмена контрольными символами и кодовыми группами. Контрольный символ может быть составлен из нескольких кодовых групп, включающих служебную информацию, необходимую для инициализации и организации управления обменом данными. На рис. 3 показан пример передачи потока данных по каналам 1x и 4x соответственно.



Lane-0	Lane-1	Lane-2	Lane-3
/SC/	Cdata-0	Cdata-1	Cdata-2
/I/	/I/	/I/	/I/
/PD/	Control Symbol (Start-of-packet)		
Data-0	Data-1	Data-2	Data-3
Data-4	Data-5	Data-6	Data-7
/PD/	Control Symbol (Start-of-packet)		
Data-0	Data-1	Data-2	Data-3
Data-4	Data-5	Data-6	Data-7
Data-8	Data-9	Data-10	Data-11
/SC/	Cdata-0	Cdata-1	Cdata-2
/PD/	Control Symbol (End-of-packet)		
/I/	/I/	/I/	/I/
/I/	/I/	/I/	/I/
/SC/	Cdata-0	Cdata-1	Cdata-2
/I/	/I/	/I/	/I/

Ри

Рис.3. Пример передачи потока данных по каналам 1x и 4x

В режиме 1x данные последовательно передаются по одной из линий. Символом /SC/ отмечена кодовая группа, обозначающая начало контрольного символа, /PD/ - начало пакета. Символом /I/ отмечена синхронизационная (idle) последовательность данных, которая передаётся при начальной инициализации, а также в отсутствие пакетов и контрольных символов. Эта последовательность может быть легко распознана входной логикой устройства, и проигнорирована,

в случае, если устройства уже синхронизированы. В многоканальном режиме пакеты и контрольные символы распределяются по всем линиям. При этом idle передаётся одновременно по всем доступным линиям. Такой алгоритм в многоканальном режиме обеспечивает также выравнивание линий между собой. Допустимая возможная задержка данных между линиями может достигать десятков наносекунд, что соответствует разности длин отдельных линий

связи внутри единого канала порядка 1-10 метров.

На рис.4 представлен алгоритм настройки, инициализации и контроля физической приёмопередающей среды. Для реализации описанного механизма обмена для каждого Nx/Mx/1x канала необходима одна машина состояний инициализации и контроля, а также служебные машины состояний синхронизации (отдельно для каждой из линий) и единый блок выравнивания линий. При сбросе устройство переходит в состояние ВСЁ_ОТКЛ, передача и приём данных не осуществляется, все счётчики и внутренние состояния сбрасываются. Переход из этого состояния в состояние ПОИСК происходит по событию внутреннего таймера. Длительность таймера составляет величину порядка сотен микросекунд. Этот интервал необходим, чтобы устройство на противоположной стороне, будучи в любом другом состоянии, получило ошибки данных, потеряло синхронизацию и также перешло в состояние ВСЁ_ОТКЛ. В состоянии ПОИСК выходной порт передаёт по линиям 0 и R последовательность данных, состоящую из кодовых групп, содержащих comma-символы для выравнивания данных внутри одной линии, skip-символы для обеспечения компенсации возможной разности частот приёмника и передатчика, а также alignment-символы для обеспечения выравнивания Nx или Mx линий

между собой [8]. В случае если устройству не требуется использовать только 1x режим, а также любая из линий 0 или R синхронизованы (выполнено выравнивание данных внутри линии и отсутствие ошибок кодировки), то устройство переходит в режим ОТКРЫТИЕ_0. Значение R выбирается исходя из требований по резервированию линий. Это может быть как одна линия (в случае простого дублирования), так и набор линий в случае многократного их резервирования. В состоянии ОТКРЫТИЕ_0 последовательность idle одновременно передаётся по всем линиям Nx/Mx, в этом же состоянии приёмник осуществляет выравнивание всех линий между собой, используя alignment-символы в составе idle. Максимальная длительность пребывания в этом состоянии ограничена таймером. Длительность этого интервала может составлять десятки миллисекунд. Такой временной интервал необходим, чтобы гарантировать завершение выравнивания линий.

В случае успешного выравнивания линий Nx, в отсутствие ошибок и требований перехода в режим Mx, устройство переходит в состояние Nx_РЕЖИМ. Это рабочий режим с максимальной производительностью. Устройство обеспечивает передачу и приём пакетов, контрольных символов по всем линиям, контролируя наличие ошибок приёма и выравнивание линий.

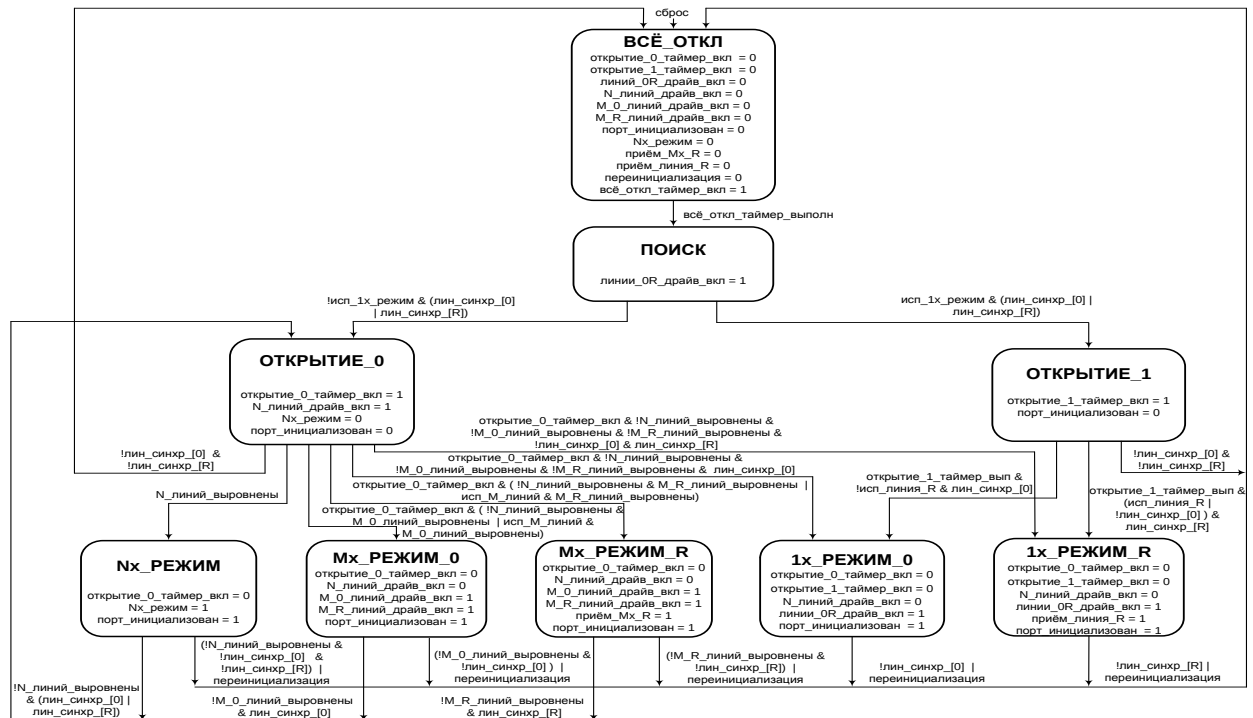


Рис.4.Алгоритм настройки, инициализации и контроля для устройства Nx/Mx/1x

В случае достижения таймером порогового значения, а также успешного выравнивания только набора линий Mx_0 или

Mx_R, либо в случае, когда требуется использовать только режимы Mx, машина состояний переходит из ОТКРЫТИЕ_0 в

$Mx_РЕЖИМ_0$ или $Mx_РЕЖИМ_R$. Число режимов Mx может варьироваться, максимальное

значение определяется отношением $\frac{N}{M}$. Иначе по истечению таймера в состоянии ОТКРЫТИЕ_0, если произошла ошибка приёма данных по некоторым линиям, либо выравнивание между линиями Nx , Mx_0 или Mx_R не достигнуто, но при этом линии $1x_0$ либо $1x_R$ синхронизованы, устройство переходит в состояние $1x_РЕЖИМ_0$ или $1x_РЕЖИМ_R$ соответственно. В случае если устройству требуется использовать только $1x$ режим, а также любая из линий 0 или R синхронизованы (выполнено выравнивание данных внутри линии и отсутствие ошибок кодировки), то устройство переходит в режим ОТКРЫТИЕ_1. В состоянии ОТКРЫТИЕ_1 idle последовательность одновременно передаётся только по линиям 0 и R . Максимальная длительность пребывания в этом состоянии также ограничена таймером. Определённый временной интервал необходим для гарантированного завершения синхронизации линий 0 и R . Число режимов $1x$ может варьироваться, максимальное значение определяется числом N . В случае достижения таймером порогового значения, если синхронизация достигнута линией 0 , то выполняется переход в состояние $1x_РЕЖИМ_0$, иначе, если синхронизация достигнута линией R , то выполняется переход в состояние $1x_РЕЖИМ_R$. В режимах $1x_РЕЖИМ_0$ и $1x_РЕЖИМ_R$ приём и передача данных осуществляется только по линиям 0 и R соответственно. При повторной инициализации, либо если обнаружены ошибки любой из линий в составе прошедшего инициализацию $Nx/Mx/1x$ канала, устройство возвращается в состояние ВСЁ_ОТКЛ. В случае, если машина состояний и

инициализации принимает значения $Nx_РЕЖИМ$, $Mx_РЕЖИМ_0$ или $Mx_РЕЖИМ_R$, то в случае нарушения выравнивания линий Nx , Mx_0 или Mx_R линий соответственно, устройство переходит обратно в состояние ОТКРЫТИЕ_0.

При анализе состояний и их переходов видно, что состояние $Nx_РЕЖИМ$ обладает наивысшим приоритетом, далее следуют последовательно в порядке снижения приоритета состояния $Mx_РЕЖИМ_0$, $Mx_РЕЖИМ_R$, $1x_РЕЖИМ_0$ и $1x_РЕЖИМ_R$, где также происходит обмен пакетами и контрольными символами. В случае повреждения линий связи, в случае ошибок, при отключении и повторном включении как при «горячем подключении» происходит автоматическая перенастройка. Все неподтверждённые и потерянные данные передаются повторно в соответствии с методами управления потоком данных на канальном уровне.

Максимальная пропускная способность канала достигается в режиме Nx , минимальная в режиме $1x$. Рассмотрим зависимость пропускной способности полностью резервированного канала связи от числа линий. Полностью резервированным каналом связи назовём такую $Nx/Mx/1x$ конфигурацию, где R есть множество

в интервале $\left[1, \frac{N}{M}\right]$ для конфигурации Mx , а для режима $1x$ $R = N$. По оси абсцисс отложим принятую за 100% пропускную способность Nx канала, а по оси ординат число ошибочных или отключённых линий. На рис. 5 представлена зависимость приведённой пропускной способности полностью резервированного канала связи от числа неисправных линий для конфигураций $8x/4x/1x$ и $8x/2x/1x$ соответственно.

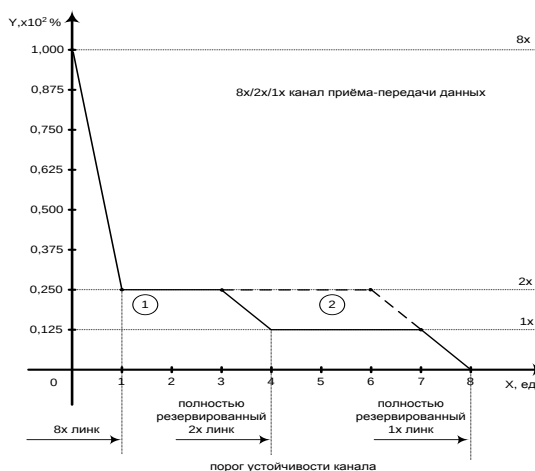
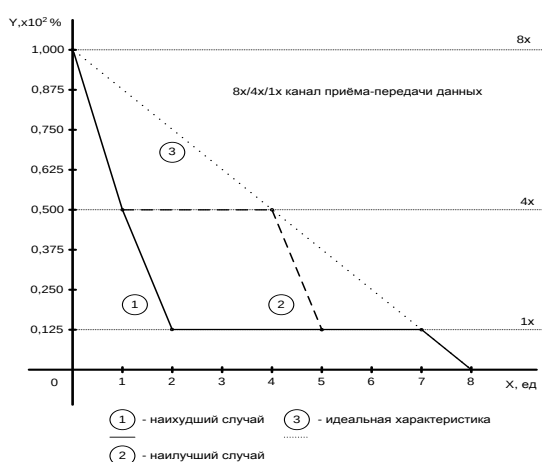


Рис.5. Графики зависимости приведённой пропускной способности полностью резервированного канала связи от числа неисправных линий для конфигураций $8x/4x/1x$ и $8x/2x/1x$ соответственно

Для конфигурации $8x/4x/1x$ при выходе из строя любой из линий пропускная способность канала падает в два раза. В наихудшем случае, когда выходят из строя 2 линии, по одной линии в

каждом $4x$ наборе, включается режим $1x$, пропускная способность падает в 8 раз. Наилучший случай отличается тем, что очередная по счёту неисправная линия находится в том же

4х наборе линий. В обоих случаях, когда работоспособна всего одна линия из восьми, осуществляется приём и передача данных в состояниях 1х_РЕЖИМ_0 или 1х_РЕЖИМ_R. Для конфигурации 8х/2х/1х при выходе из строя любой из линий пропускная способность канала падает в четыре раза. В наихудшем случае, когда выходят из строя 4 линии, по одной линии в каждом 2х наборе, включается режим 1х, пропускная способность падает в 8 раз. Наилучший случай отличается тем, что очередная по счёту неисправная линия находится в том же 2х наборе линий. Если работоспособна всего одна линия из восьми, осуществляется приём и передача данных в состояниях 1х_РЕЖИМ_0 или 1х_РЕЖИМ_R. Полученные характеристики наглядно показывают, что работоспособность канала сохраняется до тех пор, пока работоспособны всего по одной линии в каждом направлении из N дуплексных линий, составляющих полный канал. В то же самое время при выходе из строя всего одной линии суммарная пропускная способность сильно снижается. В этом главный недостаток рассмотренного метода. Очевидно, что причиной этого является ограниченность режима Mx, где

число линий меньше, чем в режиме Nx в два (для 4х) или в четыре (для 2х) раза. На графике это проявляется в сильном отклонении полученной кривой от идеальной характеристики. Идеальная характеристика представляет собой прямую, соединяющую точку при отсутствии повреждённых линий и максимальной пропускной способностью в режиме Nx и точку с нулевой пропускной способностью при полностью неисправном канале. Чем ближе полученная характеристика надёжности к идеальной, тем эффективнее канал использует возможности каждой линии при неисправностях.

Одним из наиболее эффективных методов решения данного ограничения является объединение на физическом уровне двух и более портов транспортного уровня, соединённых с коммутационным ядром контроллера. Такой объединённый crosslink (кросслинк) [7] содержит дополнительные машины состояния настройки, инициализации и контроля по числу портов (одна машина состояния на каждый порт) для выбора соответствующего режима. На рис.6 представлена структурная схема коммуникационного контроллера с кросслинком $Nx_{ab}/Mx_{ab}/1x_{ab}$.

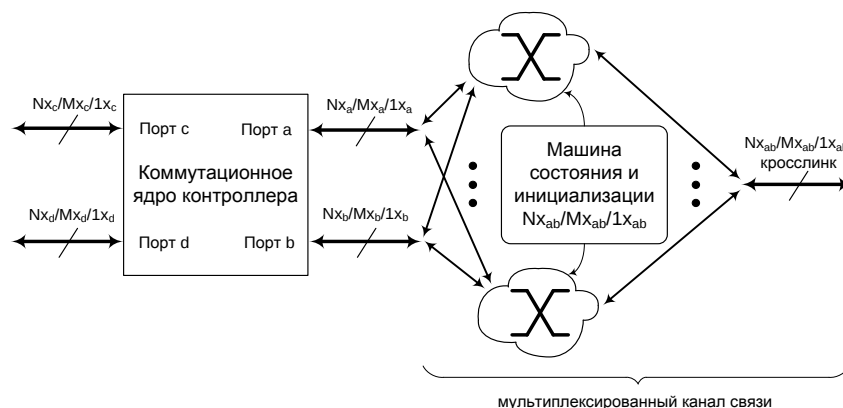


Рис.6. Структурная схема коммуникационного контроллера с мультиплексированными каналами связи (кросслинк) $Nx_{ab}/Mx_{ab}/1x_{ab}$

Мультиплексирование каналов связи позволяет задействовать одновременно режимы Mx_a и Mx_b ($Mx_a \& Mx_b$) в случае, если режим Nx_{ab} недоступен или не является предпочтительным. Такой мультиплексированный канал наиболее полно использует все сигнальные пары физического канала связи, поскольку в этом случае возможен целый ряд комбинаций типа

$(Mx_a \& 1x_b)/(Mx_b \& 1x_a)/(Mx_a | Mx_b)/(1x_a \& 1x_b)/(1x_a | 1x_b)$. На рис.7 представлена зависимость приведённой пропускной способности полностью резервированного мультиплексированного канала связи от числа неисправных линий для конфигураций 8х/4х/1х и 8х/2х/1х соответственно.

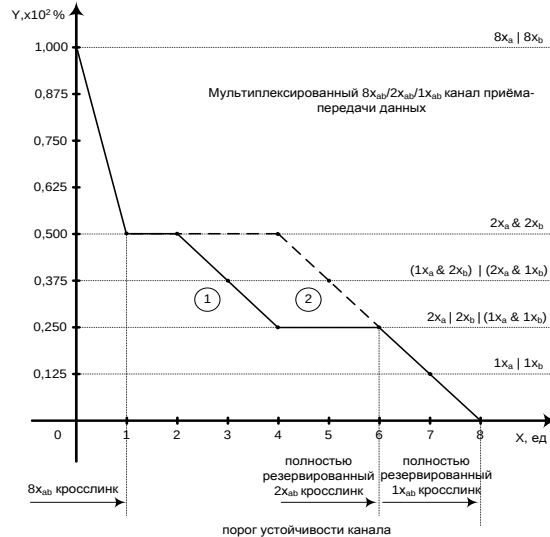
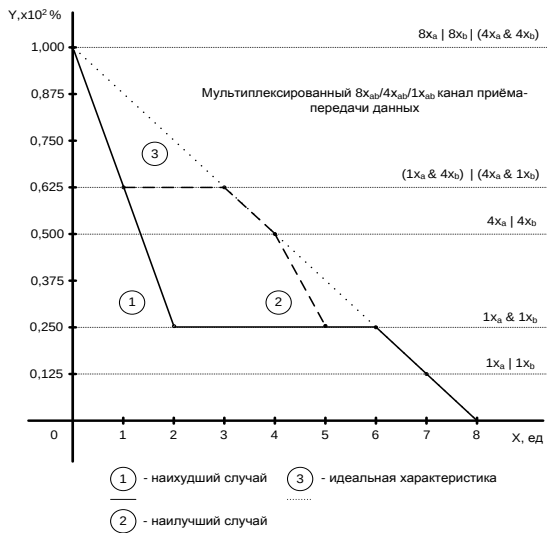


Рис.7. Графики зависимости приведённой пропускной способности полностью резервированного мультимплексированного канала связи от числа неисправных линий для конфигураций $8x_{ab}/4x_{ab}/1x_{ab}$ и $8x_{ab}/2x_{ab}/1x_{ab}$ соответственно

При использовании полностью резервированного мультимплексированного $8x/4x/1x$ канала при выходе из строя любой из линий пропускная способность канала возрастает до 62,5% от максимальной, а для конфигурации $8x/2x/1x$ это значение уже равно 50%. Прирост суммарной пропускной способности справедлив для двух представленных конфигураций для всех значений на оси абсцисс. Изначально настройки канала на физическом уровне могут предполагать использование одного $8x$ канала порта а или порта b или двух $4x$ каналов порта а и порта b. При нарушении целостности канала машины состояния и инициализации перенастраивают коммутационную логику так, чтобы задействовать дополнительные режимы. Так, в случае конфигурации $8x/4x/1x$, при выходе из строя одной линии, включается комбинированный режим с использованием $4x$ канала порта а или порта b и $1x$ канала порта b или порта а. Подобный ход рассуждений справедлив и для конфигурации $8x/2x/1x$. Отметим, что в этом случае именно конфигурация $8x/2x/1x$ предпочтительнее, поскольку в наихудшем случае обеспечивает более высокий темп приёма-передачи данных при выходе из строя двух и более линий связи.

Таким образом, применение описанных методов обеспечивает:

- Возможность реализации дуплексных каналов связи с $Nx/Mx/1x$ сигнальными парами с возможностью автоматической начальной и повторной инициализацией в случае ошибок или полного выхода из строя одной или нескольких сигнальных пар;
- Гибкость в выборе режима работы физического канала связи, простота реализации режима с заданным числом сигнальных пар;
- Многократное резервирование передающих линий связи с возможностью настройки числа резервных сигнальных пар;
- Обеспечение максимальной пропускной способности канала в случае отсутствия повреждений и повторяющихся ошибок линий связи;
- Обеспечение надёжности канала приёма-передачи данных при сохранении высокой пропускной способности в случае повреждений и повторяющихся ошибок одной или нескольких линий связи;
- Отсутствие необходимости выравнивания длин проводников отдельных сигнальных пар в составе физического интерфейса;
- Повышенную устойчивость к одиночным сбоям благодаря индивидуальным алгоритмам синхронизации каждой из линий;
- К недостаткам данной методики можно отнести:
 - Отсутствие открытого стандарта;
 - Увеличение числа входных тактовых сигналов, что ведёт к необходимости разработки дополнительных наборов синхронизирующей логики;
 - Уменьшение числа доступных портов коммутационного ядра при использовании мультимплексированных каналов;
 - Увеличение числа логических элементов в системе;
 - Повышение задержек при приёме и передаче данных.

В целом, реализация описанных методов и алгоритмов представляет значительный практический интерес, позволяя обеспечить высокую скорость и надёжность каналов приёма-передачи данных в составе коммуникационных контроллеров встроенного применения. Описанные подходы не ограничены

использованием исключительно логикой специально разработанных интерфейсов. Разработанные методы резервирования могут быть использованы при разработке IP ядер стандартов с открытыми спецификациями, не находясь в противоречии и расширяя возможности при реализации их требований.

Robust multi-lane serial links for on-chip fabric interconnect

I.M.Kosarev

Abstract: Methods and link training algorithm for robust serial data links in a high speed serial interconnect having multiple Nx/Mx/Lx data lanes with parallelism. Operational aspects of the interconnect provide highest data rate in serial interconnect having a plurality of data lanes in absence of link errors and high reliability of physical serial data interface combined with high data rate in case of multiple bit data errors or multi lane failures.

Keywords: multi-lane channel data parallelism, robust serial data interface, link training and status state machine, crosslink.

Литература

1. С.О. Задябин, И.М. Косарев. Архитектура перспективного коммутатора высокоскоростных каналов ввода-вывода с изменяемой шириной. “Электроника, микро- и нанoeлектроника. Сб. научн. трудов”, М.: МИФИ, 2010, 130 – 134.
2. Top500 Supercomputer Sites. URL: <http://www.top500.org/statistics/sublist/>
3. ГОСТ Р ИСО/МЭК 7498-1-99. Госстандарт России. М.: Стандартинформ, 2006, 45 – 51.
4. С.О. Задябин, И.М. Косарев. Методы увеличения пропускной способности каналов последовательных интерфейсов. “Электроника, микро- и нанoeлектроника. Сб. научн. трудов”, М.: МИФИ, 2008, 85 – 88.
5. А.Е. Агафонов, С.Г. Бобков, А.В. Ларионов, И.А. Люосева, В.Е. Токарев. Архитектура последовательного приёмопередатчика для интерфейсов третьего поколения. “Электроника, микро- и нанoeлектроника. Сб. научн. трудов”, М.: МИФИ, 2008, 89 – 93.
6. RapidIO Interconnect Specification. URL: <http://www.rapidio.org/specs/current>
7. PCI Express Base Specification Revision 3.0. URL: <http://pcisig.com/specifications/pciexpress/>
8. PHY Interface for the PCI Express, SATA and USB 3.0 Architectures. URL: <http://www.intel.ru/content/www/ru/ru/io/pci-express/phy-interface-pci-express-sata-usb30-architectures.html>

Методика тестирования приемопередатчика PCI Express

П.А. Алексан

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail: peteris@cs.niisi.ras.ru

Аннотация: В данной статье были описаны этапы тестирования, программная и аппаратная модель, используемая в процессе функциональной верификации приемопередатчиков PCI Express, а так же предложена методика тестирования приемопередатчика при условии обнаружения ошибок в работе тех или иных логических блоков.

Ключевые слова: PCI Express, LTSSM, JTAG.

1. Введение

Процесс функциональной верификации приемопередатчика PCI Express, обычно, включает в себя следующие стадии:

- Проверка канального уровня.
- Анализ протокольного соответствия стандарту.
- Проверка корректности отправки-приема данных на заданных скоростях.

Для вышеуказанных стадий требуется особая программно-аппаратная модель для удовлетворения всех задач функциональной верификации.

Зачастую при отладке опытных образцов микросхем происходит обнаружение тех или иных ошибок. Так, при работе с высокоскоростными приемопередатчиками, выявление ошибок на канальном уровне, делает практически невозможным проверку протокольного уровня. Таким же образом, некорректная работа на уровне протокола PCI Express лишает разработчика возможности проверить корректность приема-отправки данных по шине PCI Express.

В данной статье предлагается методика тестирования приемопередатчиков PCI Express, а также описывается механизм диагностики ошибок в том или ином логическом блоке микросхемы 1890BG19 разработки НИИСИ РАН.

2. Описание микросхемы 1890BG19

Интегральная микросхема 1890BG19Я (далее по тексту – микросхема) предназначена для построения программно-аппаратного комплекса системы межпроцессорных обменов (СМПО).

Микросхема представляет собой коммутатор высокоскоростных последовательных каналов.

Микросхема 1890BG19Я включает в себя:

- контроллер интерфейса PCI Express 3.0 со скоростью передачи (1x) до 8 Гбит/с и шириной канала до 8x (скорость канала до 64 Гбит/с);
- 10 блоков последовательных приемопередатчиков со скоростью передачи (1x) не менее 10 Гбит/с и шириной канала 4x, совместимый с QSFP спецификацией;
- коммутационное ядро, обеспечивающее двустороннюю высокоскоростную передачу данных между 10-ю блоками последовательных приемопередатчиков, а также передачу между блоками последовательных приемопередатчиков и контроллером интерфейса PCI Express;
- микропроцессорное ядро;
- контроллер Ethernet;
- три контроллера UART;
- два контроллера SPI;
- диагностический порт в стандарте JTAG.

Далее рассматриваются более детально этапы функциональной верификации приемопередатчика PCI Express.

3. Состав тестового окружения приемопередатчика PCI Express

Как было указано ранее, процесс функциональной верификации приемопередатчика PCI Express состоит из трех основных этапов. Рассмотрим далее их более подробно, с указанием необходимых программно-аппаратных средств для их реализации.

- Проверка канального уровня.

На данном этапе производится проверка канального уровня, то есть того, насколько заданные характеристики каналов соответствуют реальности.

В данном контексте речь идет о приемопередатчиках PCI Express. Для выявления соответствия заявленных характеристик каналов PCI Express реальным, состав программно-аппаратных средств предлагается следующий:

1. PCI SIG CBV – специализированная плата, предоставляющая возможность разработчику получить доступ ко всем линиям каналов PCI Express с целью изменения их характеристик.

2. Измерительная оснастка. Логический анализатор, высокочастотный осциллограф для измерения тактовых сигналов, а также необходимая к ним оснастка.

3. Программно-аппаратный комплекс для доступа к регистрам канального уровня через интерфейс JTAG. Данный комплекс представляет из себя специализированное программное обеспечение на языке программирования python и отладочные адаптеры на базе микросхемы ft2232H.

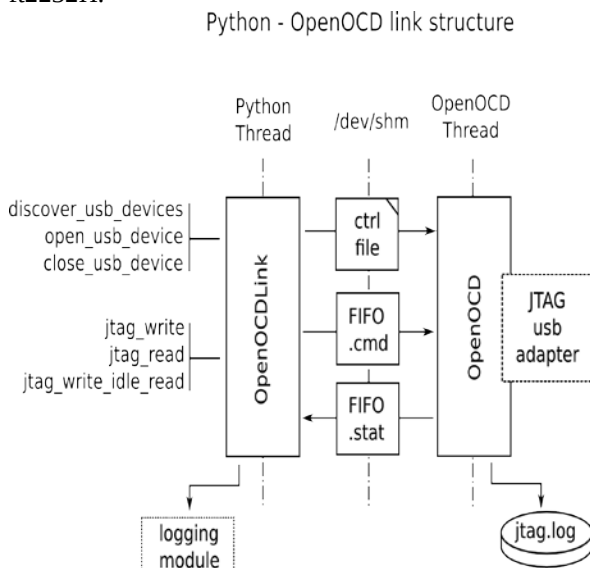


Рис.1 Блок схема ПО для доступа к регистрам микросхемы через интерфейс JTAG.

- Анализ протокольного соответствия стандарту.

На данном этапе производится проверка корректности работы многочисленных логических блоков так или иначе связанных с PCI Express. Для выявления ошибок используется следующие компоненты:

1. Протокольный анализатор LeCroy, включающий в себя как аппаратное, так и программное обеспечения, с помощью которого пользователь может отслеживать весь поток данных между инструментальной ЭВМ и целевым устройством.

2. Логический анализатор для мониторинга специализированных выводов микросхемы.

- Проверка корректности отправки-приема данных на заданных скоростях.

Для проверки корректности приема-передачи данных на заявленных скоростях используется специализированное программное обеспечение на инструментальной ЭВМ, к которой физически присоединено тестируемое устройство в целях организации и проверки приема и передачи данных.

4. Методика тестирования приемопередатчиков PCI Express микросхемы 1890BG19

Для выявления ошибок на канальном уровне приемопередатчика рекомендуется проведение следующих экспериментов.

1. Тестирование каналов в условиях «программной петли». Тестируемое устройство устанавливается в PCI SIG CBV. Приемопередатчики PCI Express программируются на работу в режиме «программной петли», то есть без физического замыкания линий TX на RX с последующим запуском тестов псевдослучайной бинарной последовательности.

2. Тестирование каналов в режиме «аппаратной петли». Данный этап полностью аналогичен предыдущему с тем отличием, что линии каналов PCI Express физически замыкаются друг на друга.

Следующим этапом является проверка протокольного уровня PCI Express.

Для выявления ошибок на данном уровне, отлаживаемое устройство физически соединяется с инструментальной ЭВМ с включением протокольного анализатора. Задается режим работы приемопередатчиков PCI Express (gen1/gen2/gen3) с помощью специализированных переключателей и программированием приемопередатчиков через интерфейс JTAG (более того предусмотрена автоматическая загрузка конфигурации из ПЗУ). Помимо вышеуказанного, в режиме реального времени производится мониторинг LTSSM машины состояний PCI Express и других необходимых специализированных выводов микросхемы. При отсутствии ошибок, после загрузки инструментальной машины, целевое устройство обнаруживается в списке подключенных устройств PCI Express.

После успешной верификации протокольного уровня PCI Express, разработчик должен иметь возможность отладки приема-передачи данных на заданных скоростях, иметь доступ к внутренним регистрам отлаживаемого устройства через PCI Express. Для реализации поставленных задач

было разработано программное обеспечение для ручного чтения/ записи по указанным адресам регистров, а так же драйвер под ОС Linux, который помимо всего прочего, предоставляет функционал для запуска различных тестов, загрузки программ в память send/recv процессоров и т.д.

5. Обнаружение ошибок.

Результаты функциональной верификации микросхемы показали, что на канальном уровне ошибок нет. Приемопередатчики работают на заданной скорости и данные передаются без ошибок. Проверки проводились с использованием Compliance Base Board путем замыкания друг на друга TX и RX линий с последующим запуском тестов генерации псевдослучайной последовательности.

Однако при исследованиях протокольного уровня было установлено, что LTSMM автомат не проходит все состояния до L0 и «зависает» или в подсостоянии Configuration.Complete или в Recovery.RecvCfg.

Исходя из спецификации такое возможно из-за ошибок в работе блока выравнивания тактовых сигналов, что и порождает остановку передачи по линиям (IDLE режим). Данное предположение подтверждает измерения на логическом анализаторе (рис.2, 3), где выводы Debug 10 – RxElecIdle, Debug 13,14 – LaneAlign, state – текущее состояние автомата.

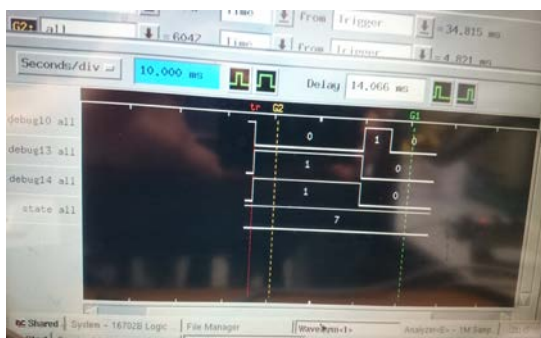


Рис.2 Подсостояние Configuration.Complete на логическом анализаторе.

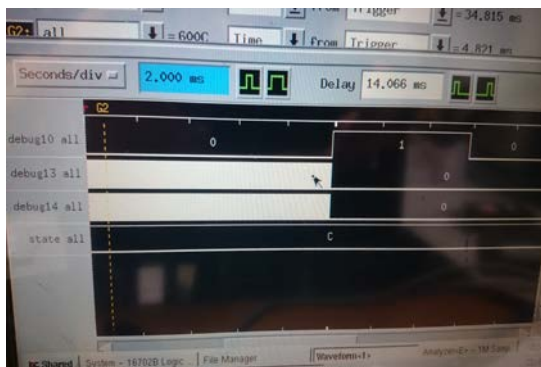


Рис. 3 Подсостояние Recovery.RecvCfg на логическом анализаторе.

Обнаруженные ошибки не позволяют перейти к проверке корректности передачи данных по шине PCI Express, что является наиболее одним из наиболее важных этапов в процессе отладки и функционировании устройства в целом.

Отметим, что состояние RxElecIdle возможно исключительно при условии потери или плохом качестве входного опорного тактового сигнала.

Для устранения найденной ошибки предлагается два подхода. Первый из них заключается в следующем.

Основной идеей, каким образом возможно использование приемопередатчика без вышеуказанного режима является следующее. При подаче сброса на микросхему меняется разность по фазе между канальными тактовыми сигналами. Таким образом, можно предположить, что при постоянном сбросе приемопередатчиков рано или поздно канальные тактовые счетчики встанут в такое положение, что в работе блока выравнивания не будет никакой необходимости.

Таким образом, для обхода найденных ошибок была разработана методика, главными моментами которой является следующее:

1. Реализация мониторинга текущего состояния машины состояний PCI Express. Благодаря предусмотренным 16 выводам отладочной информации, имеется возможность считывать в реальном времени состояние LTSSM. Помимо состояний LTSMM выводятся сигналы IDLE. Значения считываются через внутренние регистры через интерфейс JTAG.

2. При считывании активного состояния IDLE, производится перевод из 0 в 1 и обратно одного из отладочных выводов GPOUT, путем соответствующей записи в регистр.

3. Используемый вывод GPOUT соединяется со сбросовым выводом, предусмотренным на плате.

Таким образом, сбрасывая микросхему при каждом выходе в IDLE, имеется возможность в конечном итоге достигнуть стабильного рабочего состояния L0. Как следствие, разработчик может проверить корректность работы механизма приема-передачи пакетов, скорость передачи данных и т.д.

Вторым подходом является повышение напряжения, благодаря которому имеется возможно улучшить качество тактового сигнала, а соответственно и избежать ошибок при передаче данных.

Для повышения/ понижения напряжения на плате были предусмотрены программируемые источники питания, с помощью которых разработчик имеет возможность производить мониторинг текущих показателей источников питания, а также вносить необходимые изменения в их работу.

Было установлено, что при штатном показателе напряжения в 1.0 В, встречаются

вышеописанные ошибки в работе приемопередатчиков. При повышении показателя напряжения микросхемы на 20% (1.2 В), ошибки были устранены, и микросхема штатным образом стала определяться стандартными средствами на инструментальной ЭВМ. Таким образом, предположение о недостаточности амплитуды тактового сигнала было подтверждено.

Таким образом, устранив ошибки на этапе верификации протокольного уровня, разработчик имеет возможность перейти к следующему этапом, обладая при этом полным набором программно-аппаратных средств для обнаружения ошибок в работе того или иного логического блока тестируемой микросхемы.

6. Заключение

В данной статье описана методика тестирования приемопередатчиков PCI Express на

примере микросхемы 1890ВГ19я разработки НИИСИ РАН.

Методика включается в себя описание программно-аппаратных методов отладки логических блоков микросхемы, мониторинга внутренних сигналов, способов доступа к внутренним регистрам микросхемы.

Стоит отметить, что в ходе отладки нередко встречаются ошибки в работе тех или иных логических блоках микросхемы, что может исключить возможность продолжения функциональной верификации микросхемы.

Предложенная методика позволяет разработчику работать над устранением найденных ошибок для продолжения отладки приемопередатчиков, за исключением ошибок в логических блоках микросхемы, устранение которых возможно лишь при отладке на специализированных ПЛИС.

Methodology of testing of the PCI Express transceiver

Peteris Andrisovich Aleksan

Summary: In this article testing stages, the program and hardware model used in the course of functional verification of PCI Express transceivers were described, and the technique of testing of the transceiver on condition of detection of mistakes in operation of these or those logical blocks is also offered.

Keywords: PCI Express, JTAG, LTSSM

Литература

1. PCI Express® Base Specification Revision 1.1.: www.pci-sig.com, 2008
2. Mike Jackson, Ravi Budruk PCI Express Technology 3.0// Mind Share press: 2014г
3. Н.Кольский. Интерфейс JTAG: тестирование плат, программирование и отладка : "Печатный монтаж". Выпуск #1, 2009
4. В.Рустинов, А.Городецкий. Разделяй и властвуй – принцип граничного сканирования: Chip News. http://chipnews.gaw.ru/html.cgi/arhiv/01_06/stat3.htm
5. Стандарт IEEE 1149.6: www.jtag-test.ru/JTAGUniversity/index.php.
6. K.Parker. The Boundary-Scan Handbook. Analog and Digital : KAP, 2003.
7. А.Городецкий, Л.Курилан. Регистры и команды граничного сканирования, часть 2: «Производство электроники» 2007, №6.
8. OpenOCD User's Guide - <http://openocd.sourceforge.net/doc/html/>, 2009

Об интерполяции функций обобщёнными полиномами, построенными на базе гладких чебышёвских систем

В.Б. Демидович

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»,
Механико-математический факультет, Москва, Россия,
E-mail : vasedem@mech.math.msu.su

Аннотация: Излагается историко-математический обзор результатов по интерполяции функций гладкими чебышёвскими обобщёнными полиномами.

Ключевые слова: гладкие чебышёвские системы, обобщённые полиномы, интерполяция.

I. Исходные понятия

Исходным понятием нам служит фундаментальная (в пространстве $C([a, b])$) обобщённая полная чебышёвская система функций – Пафнутий Львович Чебышёв /1821-1894/ был основоположником исследований подобных систем (в 1870-ых годах), а его ученик Андрей Андреевич Марков /1856-1922/ предложил их называть *его именем*. В 1950-ых годах интерес к таким системам усилился, и у истоков этого усиления стояли Карлин /Samuel Karlin/ (1924-2007) и Марк Григорьевич Крейн /1907-1989/.

Согласно современной терминологии, совокупность функций

$$\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty} \in C^{(\infty)}([a, b]) \quad (1.1)$$

образует, на отрезке $[a, b] \subset R$ ($a < b$), фундаментальную гладкую чебышёвскую систему в пространстве $C([a, b])$ если:

А) для каждого её (конечного) набора функций

$$\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

построенный по нему нетривиальный обобщённый полином порядка j

$$\phi_j(t) = \sum_{i=0}^j c_i e_i(t) \quad \left(\sum_{i=0}^j c_i^2 \neq 0 \right) \quad (1.3)$$

имеет на $[a, b]$ не более j корней с учётом их алгебраических кратностей (то есть, каждый набор функций (1.2) служит ЕСТ – системой j -го порядка на отрезке $[a, b]$, иначе говоря, является

Extended Complete Tchebycheff system на рассматриваемом отрезке);

Б) соответствующее линейное пространство гладких чебышёвских обобщённых полиномов

$$\Phi([a, b]) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi_j([a, b]), \quad (1.4)$$

где

$$\Phi_j([a, b]) = \text{span}\{e_i(t)\}_0^j \quad (1.5)$$

- линейная оболочка гладких чебышёвских обобщённых полиномов до j -го порядка (порождающая в пространстве $\Phi([a, b])$ подпространство размерности $j+1$), плотно в пространстве $C([a, b])$ относительно его равномерной нормировки, и, тем самым, для замыкания пространства $\Phi([a, b])$ справедливо равенство

$$cl \Phi([a, b]) = C([a, b]). \quad (1.6)$$

(Примечание 1: Различные свойства чебышёвских систем в XX столетии рассматривали Владислав Кириллович Дзядык /1919-1998/, Иван Иванович Ляшко /1922-2008/, Владимир Леонидович Макаров /р. 1941/, Агнесса Андреевна Скоробогатько /р. 1930/, Лоран /Pierre-Jean Laurent/ (р. 1937), Кунц /Kaiser Kunz/ (1915-2013). Их использование в вычислительной математике исследовали Коллатц /Lothar Collatz/ (1910-1990) и его ученик Крабс /Werner Krabs/ (р. 1934).)

II. Примеры фундаментальных гладких чебышёвских систем функций в пространстве $C([a, b])$

Приведём примеры гладких чебышёвских систем функций, фундаментальных в $C([a, b])$.

1. Система классических степенных функций
 $\{1, t, t^2, \dots, t^j, \dots\} \quad ([a, b] \subset R), \quad (2.1)$
 порождающая пространство классических степенных многочленов P .

2. Система экспоненциальных функций
 $\{1, e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_j t}, \dots\} \quad ([a, b] \subset R, \quad (2.2)$
 $A^+ =: \{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots\}, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j} = +\infty,$
 порождающая пространство экспоненциальных полиномов $E(A^+)$.

3. Система экспоненциально-степенных функций
 $\{1, t, \dots, t^{\beta_0-1}, e^{\alpha_1 t}, te^{\alpha_1 t}, \dots, t^{\beta_1-1} e^{\alpha_1 t}, \dots$
 $e^{\alpha_j t}, te^{\alpha_j t}, \dots, t^{\beta_j-1} e^{\alpha_j t}, \dots\} \quad (2.3)$
 $([a, b] \subset R, A^+ =: \{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots\},$
 $B^+ =: \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_j, \dots \in Z_+, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j}{\alpha_j} = +\infty),$
 порождающая пространство экспоненциально-степенных полиномов $EP(A^+, B^+)$.

4. Система произвольных степенных функций
 $\{1, t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_j}, \dots\} \quad ([a, b] \subset R^+, \quad (2.4)$
 $A^+ =: \{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots\}, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j} = +\infty,$
 порождающая пространство обще-степенных полиномов $\Pi^+(A^+)$.

5. Система рационально-линейных функций
 $\{1, \frac{1}{t + \alpha_1}, \dots, \frac{1}{t + \alpha_j}, \dots\}, \quad ([a, b] \subset R^+, \quad (2.5)$
 $A^+ =: \{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots\}, \alpha_j \rightarrow +\infty,$
 порождающая пространство рационально-линейных полиномов $\mathcal{R}^+(A^+)$.

6. Система логарифмических функций
 $\{1, \ln(t + \alpha_1), \dots, \ln(t + \alpha_j), \dots\} \quad ([a, b] \subset R^+,$
 $A^+ =: \{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots\}, \alpha_j \rightarrow +\infty), \quad (2.6)$

порождающая пространство логарифмических полиномов $\Lambda^+(A^+)$.

7. Система экспоненциально-гауссовых функций 1-го рода
 $\{1, e^{-\frac{(t+\alpha_1)^2}{\beta}}, \dots, e^{-\frac{(t+\alpha_j)^2}{\beta}}, \dots\}$
 $([a, b] \subset R^+, A^+ =: \{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots\},$
 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j} = +\infty, \beta > 0), \quad (2.7)$

порождающая пространство экспоненциально-гауссовых полиномов 1-го рода $EG_{\beta}^+(A^+)$.

8. Система экспоненциально-гауссовых функций 2-го рода

$\{e^{-\frac{(t-\alpha_0)^2}{\beta}}, e^{-\frac{(t-\alpha_1)^2}{\beta}}, \dots, e^{-\frac{(t-\alpha_j)^2}{\beta}}, \dots\}$
 $([a, b] \subset R^+, A_0^+ =: 0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots),$
 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j} = +\infty, \beta > 0), \quad (2.8)$

порождающая пространство экспоненциально-гауссовых полиномов 2-го рода $EG_{\beta}^+(A_0^+)$.

(Примечание 2: Напомним, что функции вида (2.7)-(2.8) детально изучал Гаусс /Carl Friedrich Gauss/ (1777-1855).)

9. Система классических косинусоидальных функций
 $\{1, \cos t, \cos 2t, \dots, \cos jt, \dots\} \quad ([a, b] \subset (0, \pi)), \quad (2.9)$
 порождающая пространство классических косинусоидальных тригонометрических полиномов $T_{\cos}(0, \pi)$.

10. Система классических синусоидальных функций
 $\{\sin t, \sin 2t, \dots, \sin jt, \dots\} \quad ([a, b] \subset (0, \pi)), \quad (2.10)$
 порождающая пространство классических синусоидальных тригонометрических полиномов $T_{\sin}(0, \pi)$.

Подобные примеры можно было бы приводить и далее, получая их за счёт «перекрёстного скрещивания» новые случаи (например, введя *гауссовы экспоненциально-полиномиальные* функции, или же *логарифмически-полиномиальные* функции и т.п.).

(Примечание 3: Ещё Вейерштрасс /Karl Theodor Wilhelm Weierstrass/ (1815-1897) установил плотность в $C([a, b])$ соответствующего пространства классических степенных многочленов. Впоследствии, для пространства обобщённых полиномов, подобными исследованиями занимались Мюнц /Herman Müntz/ (1884-1956), Качмарж /Stefan Kaczmarz/ (1895-1939), Штейнгауз /Hugo Steinhaus/ (1887-1972), Сас /Otto Szász/ (1884-1952), Александр Осипович Гельфонд /1906-1968/ и другие.)

III. Аппарат для гладких чебышёвских систем функций

Аппарат для гладких чебышёвских систем функций включает в себя следующие понятия.

1. Для набора *простых* узлов

$$\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\} \in [a, b] \quad (3.1)$$

с помощью детерминантов

$$W_{\begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_j \\ t_0, & \dots, & t_j \end{pmatrix}} = \begin{vmatrix} e_0(t_0) & \dots & e_j(t_0) \\ e_0(t_1) & \dots & e_j(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0(t_j) & \dots & e_j(t_j) \end{vmatrix} \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (3.2)$$

определяются:

А) чебышёвские обобщённые полиномы *лагранжеского типа*

$$U_i(t) = \frac{\begin{vmatrix} e_0(t_0) & \dots & e_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0(t_{i-1}) & \dots & e_n(t_{i-1}) \\ e_0(t) & \dots & e_n(t) \\ e_0(t_{i+1}) & \dots & e_n(t_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0(t_n) & \dots & e_n(t_n) \end{vmatrix}}{W_{\begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_n \\ t_0, & \dots, & t_n \end{pmatrix}}} \quad (0 \leq i \leq n), \quad (3.3)$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$u_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)} = \frac{(t-t_0) \dots (t-t_{i-1})(t-t_{i+1}) \dots (t-t_n)}{(t_i-t_0) \dots (t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1}) \dots (t_i-t_n)} \quad (3.3')$$

$(0 \leq i \leq n).$

(Примечание 4: Для классических степенных многочленов формулы (3.3') выписал Лагранж /Joseph Louis Lagrange/ (1736-1813). Для чебышёвских обобщённых полиномов формулы вида (3.3) были впервые выписаны, видимо, Евгением Яковлевичем Ремезом /1896-1975/.)

Б) чебышёвские обобщённые полиномы *ньютонического типа*

$$V_k(t) = \frac{W_{\begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_{k-1}, & e_k \\ t_0, & \dots, & t_{k-1}, & t \end{pmatrix}}}{W_{\begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_{k-1} \\ t_0, & \dots, & t_{k-1} \end{pmatrix}}}, \quad V_0(t) =: e_0(t) \quad (3.4)$$

$$(1 \leq k \leq n+1),$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$v_k(t) = (t-t_0)(t-t_1) \dots (t-t_{k-1}), \quad v_0(t) =: 1$$

$$(1 \leq k \leq n+1). \quad (3.4')$$

(Примечание 5: Для классических степенных многочленов формулы (3.4') предложил использовать ещё Ньютон /Isaac Newton/ (1643-1727).

Для обобщённых чебышёвских полиномов формулы вида (3.4) выписывали Мюльбах /Günter Mülbach/ (p.1941), Зингер /Ivan Singer/ (p. 1922) и Попович /Tiberiu Popovičiu/ (1906-1975).)

В) обобщённые «простые» разделённые *разности* от заданной функции $x(t) \in C^{(n)}([a, b])$ в силу рассматриваемой чебышёвской системы по узлам (3.1)

$$\Delta^l[x(t); t_0, t_1, \dots, t_l] = \frac{W_{\begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_{l-1}, & x \\ t_0, & \dots, & t_{l-1}, & t_l \end{pmatrix}}}{W_{\begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_{l-1}, & e_l \\ t_0, & \dots, & t_{l-1}, & t_l \end{pmatrix}}} \quad (1 \leq l \leq n), \quad \Delta^0[x(t); t_0] =: \frac{x(t_0)}{e_0(t_0)}, \quad (3.5)$$

в классическом степенном случае представимые в виде

$$\delta' [x(t); t_0, t_1, \dots, t_l] = \sum_{i=0}^l \frac{(t-t_i)}{v_{l+1}(t)} x(t) \Big|_{t=t_i} \quad (3.5')$$

$$(1 \leq l \leq n), \quad \delta^0 [x(t); t_0] =: x(t_0).$$

(Примечание 6: В пространстве чебышёвских обобщённых полиномов «простые» разделённые разности вида (3.5) ввёл, в частности, Мюльбах. Для классических степенных многочленов представление соответствующих разделённых разностей формулой (3.5') содержатся ещё в работах Ньютона.)

2. Для набора кратных узлов

$$\underbrace{\{t_0 = \dots = t_0\}}_{(q_0+1) \text{ раз}} < \underbrace{\{t_1 = \dots = t_1\}}_{(q_1+1) \text{ раз}} < \dots < \underbrace{\{t_p = \dots = t_p\}}_{(q_p+1) \text{ раз}} \in [a, b] \quad (3.6)$$

$$\left(\sum_{i=0}^p (q_i + 1) - 1 = n \right),$$

при сплошной перенумерации (с заменой переменной t на τ) набора (3.6) в виде

$$\{\tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n\} \in [a, b], \quad (3.6')$$

с помощью детерминантов

$$W \begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_j \\ \tau_0, & \dots, & \tau_j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_0(t_0) & \dots & e_j(t_0) \\ e_0^{(1)}(t_0) & \dots & e_j^{(1)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(q_0)}(t_0) & \dots & e_j^{(q_0)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0(t_1) & \dots & e_j(t_1) \\ e_0^{(1)}(t_1) & \dots & e_j^{(1)}(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(k)}(t_i) & \dots & e_j^{(k)}(t_i) \end{vmatrix}$$

$$\left(\sum_{l=0}^{i-1} (q_l + 1) + k = j, \quad k \leq q_i, \quad i \leq p, \quad j = 0, 1, \dots \right), \quad (3.7)$$

определяются:

А) чебышёвские обобщённые полиномы лагранжа-эрмитовского типа

$$U_{ij}(t) = \frac{\begin{vmatrix} e_0(t_0) & \dots & e_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(q_0)}(t_0) & \dots & e_n^{(q_0)}(t_0) \\ e_0(t_1) & \dots & e_n(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(q_1)}(t_1) & \dots & e_n^{(q_1)}(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0(t_i) & \dots & e_n(t_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(j-1)}(t_i) & \dots & e_n^{(j-1)}(t_i) \\ e_0(t) & \dots & e_n(t) \\ e_0^{(j+1)}(t_i) & \dots & e_n^{(j+1)}(t_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(q_i)}(t_i) & \dots & e_n^{(q_i)}(t_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0(t_p) & \dots & e_n(t_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(q_p)}(t_p) & \dots & e_n^{(q_p)}(t_p) \end{vmatrix}}{W \begin{pmatrix} e_0, & \dots, & e_n \\ \tau_0, & \dots, & \tau_n \end{pmatrix}} \quad (3.8)$$

$$(0 \leq i \leq p; \quad 0 \leq j \leq q_i),$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$u_{ij}(t) = \frac{1}{j!} [(t-t_0)^{q_0+1} \dots (t-t_{i-1})^{q_{i-1}+1} \times$$

$$\times (t-t_i)^j (t-t_{i+1})^{q_{i+1}+1} \dots (t-t_p)^{q_p+1}] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{q_i-1} \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{1}{(t-t_0)^{q_0+1} \dots (t-t_{i-1})^{q_{i-1}+1}} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(t-t_{i+1})^{q_{i+1}+1} \dots (t-t_p)^{q_p+1}} \right] \Big|_{t=t_i} \times (t-t_i)^k$$

$$(0 \leq i \leq p \quad 0 \leq j \leq q_i). \quad (3.8')$$

Б) чебышёвские обобщённые полиномы ньютоно-эрмитовского типа

$$V_k(t) = \frac{W(e_0, \dots, e_{k-1}, e_k)}{W(e_0, \dots, e_{k-1})}, \quad V_0(t) = e_0(t) \quad (1 \leq k \leq n+1),$$

$$(3.9)$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$v_k(t) = (t-t_0)^{q_0+1} \dots (t-t_{i-1})^{q_{i-1}+1} (t-t_i)^{j+1},$$

$$\sum_{l=0}^{i-1} (q_l+1) + (j+1) = k, \quad j \leq q_i, \quad i \leq p, \quad (3.9')$$

$$v_0(t) = 1 \quad (1 \leq k \leq n+1).$$

(Примечание 7: Для классических степенных многочленов формулы (3.8')-(3.9') предложил использовать Эрмит /Charles Hermite/ (1822-1901). В пространстве чебышёвских обобщённых полиномов Хэви /Toge Havie/ (1930-2005) «лишь наметил» целесообразность введения формул вида (3.8)-(3.9).)

В) обобщённые «кратные» разделённые разности от заданной функции $x(t) \in C^{(n)}([a, b])$ в силу рассматриваемой чебышёвской системы по узлам (3.6')

$$\Delta^l[x(t); \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l] = \frac{W(e_0, \dots, e_{l-1}, x)}{W(e_0, \dots, e_{l-1}, e_l)}$$

$$(1 \leq l \leq n), \quad \Delta^0[x(t); t_0] = \frac{x(t_0)}{e_0(t_0)}, \quad (3.10)$$

в классическом степенном случае представимые в виде

$$\delta^l[x(t); \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l] =$$

$$= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{q_k} \left\{ \frac{d^{q_k}}{dt^{q_k}} \left[\frac{(t-t_k)^{q_k+1}}{v_{l+1}(t)} x(t) \right] \right\}_{t=t_k} +$$

$$+ \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{dt^j} \left[\frac{(t-t_i)^{j+1}}{v_{l+1}(t)} x(t) \right] \right\}_{t=t_i},$$

$$(\delta^0[x(t); t_0] = x(t_0), \quad 1 \leq l \leq n;$$

$$\sum_{k=0}^{i-1} (q_k+1) + (l+1) = l; \quad i \leq p; \quad j \leq q_i).$$

$$(3.10')$$

(Примечание 8: В пространстве чебышёвских обобщённых полиномов «кратные» разделённые разности вида (3.10) ввёл, по существу, Хэви. Для классических степенных многочленов представление соответствующих разделённых разностей формулой (3.10') содержатся ещё в работах Эрмита.)

3. Введём теперь детерминанты

$$W(e_0, \dots, e_{j-1}, e_j) =$$

$$\begin{vmatrix} e_0(s) & \dots & e_{j-1}(s) & e_j(s) \\ e_0^{(1)}(s) & \dots & e_{j-1}^{(1)}(s) & e_j^{(1)}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(j-1)}(s) & \dots & e_{j-1}^{(j-1)}(s) & e_j^{(j-1)}(s) \\ e_0(t) & \dots & e_{j-1}(t) & e_j(t) \end{vmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(3.11)$$

и вронскианы

$$W(e_0(s), e_1(s), \dots, e_j(s)) =$$

$$\begin{vmatrix} e_0(s) & \dots & e_{j-1}(s) & e_j(s) \\ e_0^{(1)}(s) & \dots & e_{j-1}^{(1)}(s) & e_j^{(1)}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(j-1)}(s) & \dots & e_{j-1}^{(j-1)}(s) & e_j^{(j-1)}(s) \\ e_0^{(j)}(s) & \dots & e_{j-1}^{(j)}(s) & e_j^{(j)}(s) \end{vmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

$$(3.12)$$

(Примечание 9: Напомним, что детерминанты вида (3.12) ввёл Вронский /József Maria Hoene-Wroński/ (1776-1853).)

Тогда определяются:

А) обобщённо-полиномиальные ядра

$$K_j(t, s) = \frac{W(e_0, \dots, e_{j-1}, e_j)}{W(e_0(s), \dots, e_{j-1}(s))}, \quad (3.13)$$

$$K_0(t, s) = e_0(t) \quad (j=1, 2, \dots),$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$k_j(t, s) = (t-s)^j \quad (j=0, 1, 2, \dots). \quad (3.13')$$

(Примечание 10: Для классических степенных многочленов ядра (3.13') ввёл Коши /Augustin Louis Cauchy/ (1789-1857). В пространстве

чебышёвских обобщённых полиномов ядра вида (3.13) активно использовали Крейн, его ученик Адольф Абрамович Нудельман /р. 1931/, а также, «для некоторых приложений», Феликс Рувимович Гантмахер /1908-1964/.)

Б) обобщённые производные от заданной функции $x(t) \in C^{(j)}([a, b])$ в силу рассматриваемой чебышёвской системы

$$D_j[x(t)] =: \frac{W(e_0(t), \dots, e_{j-1}(t), x(t))}{W(e_0(t), \dots, e_{j-1}(t))}, \quad (3.14)$$

$$D_0[x(t)] =: x(t) \quad (j=1, 2, \dots),$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$\frac{d^j}{dt^j} x(t) \quad (j=0, 1, 2, \dots). \quad (3.14')$$

(Примечание 11: Напомним, что один из создателей дифференциального исчисления Лейбниц /Gottfried Wilhelm Leibniz/ (1646-1716) предложил записывать классические производные в виде (3.14') (в отличие от другого создателя дифференциального исчисления Ньютона, использовавшего для написания производных функций «точки над ними»). Идея введения «обобщённых производных в силу чебышёвской системы» (с соответствующей символикой) в виде формулы (3.14) во многом заложена в исследованиях По́йа /György Pólya/ (1887-1985), Се́ге /Gábor Szegő/ (1895-1985) и, впоследствии, Михаила Яковлевича Зингера /р. 1937/.)

В) усреднённые обобщённо-полиномиальные ядра

$$K_j^*(t, s) = \frac{K_j(t, s)}{D_j[e_j(s)]} \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (3.15)$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$k_j^*(t, s) = \frac{(t-s)^j}{j!} \quad (j=0, 1, 2, \dots). \quad (3.15')$$

4. Введём далее следующие понятия:

А. Чебышёвские обобщённые полиномы лагранжа-тэйлоровского типа

$$U_j(t; t_0) = \frac{\begin{vmatrix} e_0(t_0) & \dots & e_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(j-1)}(t_0) & \dots & e_n^{(j-1)}(t_0) \\ e_0(t) & \dots & e_n(t) \\ e_0^{(j+1)}(t_0) & \dots & e_n^{(j+1)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_0^{(n)}(t_0) & \dots & e_n^{(n)}(t_0) \end{vmatrix}}{W(e_0(t_0), \dots, e_n(t_0))} \quad (0 \leq j \leq n) \quad (3.16)$$

и чебышёвские обобщённые полиномы ньютона-тэйлоровского типа

$$V_j(t; t_0) = K_j^*(t, t_0) \quad (0 \leq j \leq n), \quad (3.17)$$

в классическом степенном случае между собой неразличимые:

$$u_j(t; t_0) = v_j(t; t_0) = \frac{(t-t_0)^j}{j!} \quad (0 \leq j \leq n). \quad (3.16'-3.17')$$

(Примечание 12: С помощью выражений (3.16')-(3.17') Тейлор /Brook Taylor/ (1685-1731) выписал своё классическое «тейлоровское разложение» для гладких функций.)

Б. Чебышевская обобщённо-интерполяционная константа Лебега

$$\Lambda_n = \max_t \sum_{i=0}^n |U_i(t)|, \quad (3.18)$$

в своей структуре совпадающая с классической интерполяционной константой Лебега

$$\lambda_n = \max_t \sum_{i=0}^n |u_i(t)|. \quad (3.18')$$

(Примечание 13: Константу (3.18') в теории интерполяции классическими степенными многочленами предложил использовать Лебег /Henri Léon Lebesgue/ (1875-1941). Её «поведение с ростом n » достаточно подробно исследовали, в частности, Исидор Павлович Натансон /1906-1964/ и Наум Ильич Ахиезер /1901-1980/.)

В. Чебышёвские обобщённо-интерполяционные константы

$$\begin{aligned} \Theta_j^* &= \max_t |D_j[e_j(t)]|, \quad \Theta_{*j} = \min_t |D_j[e_j(t)]|, \\ \Theta_j &= \frac{\Theta_j^*}{\Theta_{*j}} \geq 1 \quad (j=0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.19)$$

в классическом степенном случае принимающие вид

$$\theta_j^* = \theta_{*j} = j!, \quad \theta_j = 1 \quad (j=0, 1, 2, \dots). \quad (3.19')$$

Г. Класс функций

$$W^{(j)}[M_j; a, b] \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (3.20)$$

состоящий из совокупности функций $\{x(t)\} \subset C^{(j)}([a, b])$, удовлетворяющих оценке

$$\max_t |D_j[x(t)]| \leq M_j, \quad (3.21)$$

что в классическом степенном случае означает функциональный класс

$$w^{(j)}[M_j; a, b] \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (3.20')$$

состоящий из множества функций $\{x(t)\} \subset C^{(j)}([a, b])$, характеризующихся оценкой

$$\max_t \left| \frac{d^j}{dt^j} x(t) \right| \leq M_j. \quad (3.21')$$

(Примечание 14: Функциональный класс (3.20') (с чуть менее «сильными» требованиями для соответствующей производной j -го порядка) ввёл Сергей Михайлович Никольский /1905-2012/.)

Д. Срезку для функции $f(t, s)$, определяя её традиционным образом:

$$f^+(t, s) = \begin{cases} f(t, s) & \text{при } t > s \\ 0 & \text{при } t \leq s \end{cases}. \quad (3.22)$$

Исходя из введенных понятий, обсудим вопрос об интерполяции (простой и кратной) с помощью гладких чебышёвских обобщённых полиномов.

IV. Простая интерполяция функций гладкими чебышёвскими обобщёнными полиномами

Задачу простой интерполяции мы рассматриваем в ситуации, когда, при любом фиксированном n ($n = 1, 2, \dots$), для заданного набора простых узлов

$$\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\} \in [a, b] \quad (4.1)$$

строится интерполяционный чебышёвский обобщённый полином

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i e_i(t) \in \Phi_n([a, b]), \quad (4.2)$$

аппроксимирующий функцию $x(t) \in C([a, b])$

с реализацией равенств

$$\phi_n(t_i) = x(t_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Однозначное существование такого интерполяционного чебышёвского обобщённого полинома в пространстве $\Phi_n([a, b])$ гарантировано общими свойствами чебышёвских систем.

1. Для интерполяционного чебышёвского обобщённого полинома $\phi_n(t)$ справедливы два основных представления:

А) лагранжевского типа

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^n U_i(t) x(t_i); \quad (4.5)$$

Б) ньютоновского типа

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^n V_i(t) \Delta^i[x(t); t_0, t_1, \dots, t_i]. \quad (4.6)$$

2. Для погрешности интерполяционного чебышёвского обобщённого полинома $\phi_n(t)$ (при $x(t) \in C^{(n+1)}([a, b])$)

$$R_n(t) = x(t) - \phi_n(t) \quad (4.7)$$

справедливы, также, два основных представления:

А) лагранжевского типа

$$R_n(t) = \frac{D_{n+1}[x(\xi_t)]}{D_{n+1}[e_{n+1}(\xi_t)]} V_{n+1}(t) \quad (4.8)$$

(здесь $\xi_t = \xi(t_0, \dots, t_n, t)$ – "промежуточная точка");

Б) ньютоновского типа

$$R_n(t) = \Delta^{n+1}[x(t); t_0, t_1, \dots, t_n, t] V_{n+1}(t). \quad (4.9)$$

(Примечание 15: Существуют и иные представления как для самого интерполяционного чебышёвского обобщённого полинома $\phi_n(t)$, так и для его погрешности $R_n(t)$, в основном, связанные с «их интегральными записями». В частности, изучением таких представлений занимались, в конце 1940-ых годов, Ремез, а также Петерсон /Harold Peterson/ (1908-2001/, Милн /William Milne/ (1905-1981), Сард /Arthur Sard/ (1909-1980), Хаусхольдер /Alston Scott Householder/ (1904-1993). Но мы будем использовать лишь представления (4.5)-(4.6) и (4.8)-(4.9).)

3. Можно по-разному ввести понятие оптимальных узлов («простой») интерполяции:

А. Будем называть набор простых узлов

$$\{\hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \dots < \hat{t}_n\} \in [a, b] \quad (4.10)$$

оптимальным по Чебышёву, если эти узлы являются корнями для $\dot{\Theta}_{n+1}(t)$ - гладкого чебышёвского обобщённого полинома $(n+1)$ -го порядка с единичным старшим коэффициентом наименьшего уклонения (в метрике $C([a, b])$) от нуля на $[a, b]$.

(Примечание 16: Для классического степенного случая известны различные явные представления для $\dot{\theta}_{n+1}(t)$ - многочлена $(n+1)$ -ой степени с единичным старшим коэффициентом наименьшего уклонения (в метрике $C([a, b])$) от нуля на $[a, b]$. В частности, широко известно, восходящее к исследованиям самого Чебышёва, представление вида

$$\dot{\theta}_{n+1}(t) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \cos \left[(n+1) \arccos \frac{2t-(b+a)}{b-a} \right], \quad (4.11)$$

из которого получаются явные выражения для узлов $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^n$:

$$\hat{t}_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left[\frac{2(n-i)+1}{2(n+1)} \pi \right]_{i=0}^n. \quad (4.12)$$

Так как линейной заменой переменного $t \in [a, b]$ на $s \in [-1, 1]$ вида

$$t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} s, \quad s = \frac{2t-(b+a)}{b-a} \quad (4.13)$$

отрезок $[a, b]$ можно перевести в отрезок $[-1, 1]$ (и, наоборот, отрезок $[-1, 1]$ можно перевести в отрезок $[a, b]$), то, для отрезка $[-1, 1]$, мы приведём ещё одно из представлений многочлена $(n+1)$ -ой степени с единичным старшим коэффициентом наименьшего уклонения (в метрике $C([-1, 1])$) от нуля:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k (t+1)^{n+1-k} (t-1)^k, \\ \alpha_k &= \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{(2n+2)!}{(2k)!(2n+2-2k)!}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Поскольку первое явное представление для классического многочлена наименьшего уклонения от нуля было найдено ещё самим Чебышёвым, то в честь него $\dot{\theta}_{n+1}(t)$ следует называть многочленом $((n+1)$ -ой степени) Чебышёва (1-го рода).

Формулу вида (4.14) для $\dot{\theta}_{n+1}(t)$ получил Пашковский /Stefan Paszkowski/ (р. 1925). А идею применять для исследования степенных многочленов $((n+1)$ -ой степени) представление их в виде сумм $\sum_{k=0}^{n+1} c_k (t+1)^{n+1-k} (t-1)^k$ с соответствующими коэффициентами $\{c_k\}_{k=0}^{n+1}$ широко пропагандировал Лоренц /George Günther Lorentz/ (1910-2006).

Для произвольного пространства гладких чебышёвских обобщённых полиномов $\Phi([a, b])$ явные представления типа (4.11) – (4.12) неизвестны. Однако в статье [Б-12] предложен структурный вид для построения аналога формулы (4.14).

Б. Будем называть набор простых узлов

$$\{\overset{\circ}{t}_0 < \overset{\circ}{t}_1 < \dots < \overset{\circ}{t}_n\} \in [a, b] \quad (4.15)$$

оптимальным по Бернштейну-Эрдошу, если на этих узлах реализуется равенство

$$\Lambda_n(\overset{\circ}{t}_0, \dots, \overset{\circ}{t}_n) = \inf_{\{\hat{t}_i\}_{i=0}^n \in [a, b]} \Lambda_n(t_0, \dots, t_n). \quad (4.16)$$

(Примечание 17: Такое название узлов объясняется тем обстоятельством, что (в 1950-ые годы) «их ввели в оборот» Сергей Натанович Бернштейн /1880-1968/ и Эрдош /Pál Erdős/ (1913-1996). Позднее выяснилась важность оптимальных (по Бернштейну-Эрдошу) узлов интерполяции в теории так называемых *ненасыщаемых аппроксимативных алгоритмов*, обладающих, попросту говоря, тем «гибким» свойством, что «чем *глаже* приближаемые объекты, тем *лучше*, с ростом n , они *этими алгоритмами приближаются*».

Поясним, что, ещё в начале XX века, в *общей теории аппроксимации* стали искать связь между свойствами «*гладкости*» рассматриваемых функций и «*скоростью приближения*» их классическими алгебраическими (и тригонометрическими) полиномами (с ростом размерности рассматриваемых подпространств). В этом направлении сначала Джексон /Dunham Jackson/ (1888-1946) получил свои основополагающие теоремы, а затем были установлены и так называемые «обратные теоремы Джексона», позволяющие *объединять в единый класс* функции, приближаемые полиномами с *одинаковой скоростью*. На этом и базировались исследования Бернштейна и Эрдоша, касающиеся *оптимальных* (в указанном смысле) *узлов интерполяции*.

В свою очередь, возникновение, впоследствии, понятия *ненасыщаемого* аппроксимативного алгоритма, во многом обязано Андрею Николаевичу Колмогорову (1903-1987). Дело в том, что к середине XX века, под влиянием Колмогорова, получила распространение *новая точка зрения на общую теорию аппроксимации*, призванная исследовать задачи об аппроксимации уже не *отдельных* функций, а *целого класса функций* (принадлежащего заданному функциональному пространству) теми или иными конечномерными подпространствами, в частности, выделять, среди подпространств *фиксированной размерности, наилучшее аппроксимирующее подпространство* для рассматриваемого класса функций (при этом, условно говоря, «расстояние» между наилучшим приближающим подпространством и исходным классом функций стали называть *поперечником*). Подобные исследования и легли в основу *теории ненасыщаемых аппроксимативных алгоритмов*, активно развивавшейся (в 1980-ых годах) Константином Ивановичем Бабенко /1919-1987/.

Добавим ещё, что, в русле всех этих вышеупомянутых исследований, во второй половине XX века, возникла также *теория информации*, родоначальником которой считается американский инженер Шеннон /Claude Elwood Shannon/ (1916-2001).).

В. Будем называть набор узлов

$$\overset{*j}{t_0} < \overset{*j}{t_1} < \dots < \overset{*j}{t_n} \in [a, b] \quad (4.17)$$

оптимальным по Сарду-Никольскому на классах функций $W^{(j)}[M_j; a, b]$ ($j=1, 2, \dots$), если на этих узлах реализуются равенства

$$\sup_{x(t) \in W^{(j)}[M_j; a, b]} \left\| R(t; x; \overset{*j}{t_0}, \dots, \overset{*j}{t_n}) \right\|_{C([a, b])} = \\ = \inf_{\{t_i\}_{i=0}^n \in [a, b]} \sup_{x(t) \in W^{(j)}[M_j; a, b]} \left\| R(t; x; t_0^j, \dots, t_n^j) \right\|_{C([a, b])}. \quad (4.18)$$

(Примечание 18: Это название узлов интерполяции обязано исследованиям /проведенным также в 1950-е годы/ Сарда и Никольского по созданию *оптимальных квадратурных формул на классах функций*.)

Г. Бернштейн и Фабер /George Faber/ (1877-1966) показали, что для *классической* интерполяционной константы Лебега $\lambda_n(\overset{\circ}{t_0}, \dots, \overset{\circ}{t_n})$, построенной по оптимальным в Бернштейна-Эрдошевском смысле узлам $\{t_i\}_{i=0}^n \in [a, b]$, *справедливы неравенства*

$$\frac{\ln(n+1)}{8\sqrt{\pi}} < \lambda_n(\overset{\circ}{t_0}, \dots, \overset{\circ}{t_n}) < \frac{4\ln(n+1)}{\pi} + 8. \quad (4.19)$$

Позже Валерий Иванович Иванов /р. 1951/ установил, что, во-первых, для *классической* интерполяционной константы Лебега, построенной по оптимальным в Чебышёвском смысле узлам $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^n \in [a, b]$, *справедливо равенство*

$$\lambda_n(\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_n) = \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + [1 - \zeta_n] \quad (4.20) \\ (0 \leq \zeta_n < 0.25),$$

а, во-вторых, *имеют место неравенства*

$$\lambda_n(\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_n) - 0.201 < \lambda_n(\overset{\circ}{t_0}, \dots, \overset{\circ}{t_n}) < \\ < \lambda_n(\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_n), \quad (4.21)$$

гарантирующие *асимптотическую близость оптимальных в Чебышёвском смысле узлов интерполяции к оптимальным в Бернштейно-Эрдошевском смысле узлам интерполяции*.

На классе функций

$$W^{(n+1)}[M_{n+1}; a, b] \quad \left(\max_t \left| \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} x(t) \right| \leq M_{n+1} \right) \quad (4.22)$$

набор оптимальных узлов интерполяции в смысле Сарда-Никольского $\{t_i =: t_i^* \}_{i=0}^n \in [a, b]$ в классическом степенном случае просто совпадёт с набором оптимальных в Чебышёвском смысле узлов $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^n \in [a, b]$ из формулы (4.13).

(Примечание 19: В произвольном пространстве гладких чебышёвских обобщённых полиномов $\Phi([a, b])$ подобные исследования (для чебышевской обобщённо-интерполяционной константы Лебега) нам неизвестны.)

4. Для погрешности интерполяции в произвольном пространстве гладких чебышёвских обобщённых полиномов $\Phi([a, b])$ справедливо следующее:

А. На классе функций $W^{(n+1)}[M_{n+1}; a, b] \left(\max_t |D_{n+1}[x(t)]| \leq M_{n+1} \right)$ (4.23)

имеет место неравенство

$$\|R_n(t; x; t_0, \dots, t_n)\|_{C([a, b])} \leq \frac{M_{n+1}}{\Theta_{n+1}} \|F_{n+1}(t; t_0, \dots, t_n)\|_{C([a, b])} \quad (4.24)$$

$$(\Theta_{n+1} = \min_t |D_{n+1}[e_{n+1}(t)]|_{C([a, b])}),$$

где аннулирующая в узлах интерполяции функция $F_{n+1}(t; t_0, \dots, t_n)$ определяется выражением

$$F_{n+1}(t; t_0, \dots, t_n) = V_{n+1}(t). \quad (4.25)$$

Б. На классе функций

$W^{(n)}[M_n; a, b] \left(\max_t |D_n[x(t)]| \leq M_n \right)$ (4.26)

имеет место неравенство

$$\|R_n(t; x; t_0, \dots, t_n)\|_{C([a, b])} \leq \frac{M_n}{\Theta_n} \|F_n(t; t_0, \dots, t_n)\|_{C([a, b])} \quad (4.27)$$

$$(\Theta_n = \min_t |D_n[e_n(t)]|_{C([a, b])}),$$

где аннулирующая в узлах интерполяции функция $F_n(t; t_0, \dots, t_n)$ определяется выражением

$$F_n(t; t_0, \dots, t_n) = 2^{-n+1} \sqrt{\prod_{i=0}^n V_n(t; t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)}. \quad (4.28)$$

(Примечание 20: В классическом степенном случае для оптимальных в Чебышёвском смысле узлов интерполяции $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^n \in [a, b]$ эти неравенства конкретизируются так:

а. В виде известной, со времён Чебышёва, оценки

$$\|r_n(t; x; \hat{t}_0, \dots, \hat{t}_n)\|_{C([a, b])} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \quad (4.29)$$

для функций из класса

$$w^{(n+1)}[M_{n+1}; a, b] \left(\max_t \left| \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} x(t) \right| \leq M_{n+1} \right). \quad (4.30)$$

б. В виде оценки

$$\|r_n(t; x; \hat{t}_0, \dots, \hat{t}_n)\|_{C([a, b])} \leq \frac{M_n}{n!} \frac{(b-a)^n}{2^{\frac{n^2-1}{n+1}}}, \quad (4.31)$$

полученной для функций из класса

$$w^{(n)}[M_n; a, b] \left(\max_t \left| \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right| \leq M_n \right), \quad (4.32)$$

Николаем Петровичем Жидковым /1918-1993/.)

V. Кратная интерполяция функций гладкими чебышёвскими обобщёнными полиномами

Задачу кратной интерполяции мы рассматриваем в ситуации, когда, при любом фиксированном n ($n = 1, 2, \dots$), для заданного набора узлов

$$\{t_0 < t_1 < \dots < t_p\} \in [a, b] \quad (5.1)$$

кратностей

$$\{q_i \geq 0\}_{i=0}^p \quad (5.2)$$

строится интерполяционный гладкий чебышёвский обобщённый полином

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i e_i(t) \in \Phi_n([a, b]) \quad (5.3)$$

$$(n = \sum_{i=0}^p (q_i + 1) - 1),$$

аппроксимирующий функцию

$$x(t) \in C^{(n)}([a, b]) \quad (5.4)$$

с реализацией равенств

$$\begin{aligned} \phi_n^{(j)}(t_i) &= x^{(j)}(t_i) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, p; j = 0, 1, \dots, q_i). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Однозначное существование такого кратно-интерполяционного чебышёвского обобщённого полинома в пространстве $\Phi_n([a, b])$ гарантировано общими свойствами гладких чебышёвских систем.

1. Для кратно-интерполяционного чебышёвского обобщённого полинома $\phi_n(t)$ справедливы два основных представления:

А) лагранжа-эрмитовского типа

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{q_i} U_{ij}(t) x^{(j)}(t_i). \quad (5.6)$$

Б) ньютона-эрмитовского типа

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^n V_i(t) \Delta^i[x(t); \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_i]. \quad (5.7)$$

2. Для погрешности кратно-интерполяционного чебышёвского обобщённого полинома $\phi_n(t)$ (при $x(t) \in C^{(n+1)}([a, b])$)

$$R_n(t) = x(t) - \phi_n(t) \quad (5.8)$$

справедливы также два основных представления:

А) лагранжа-эрмитовского типа

$$R_n(t) = \frac{D_{n+1}[x(\xi_t)]}{D_{n+1}[e_{n+1}(\xi_t)]} V_{n+1}(t) \quad (5.9)$$

(здесь $\xi_t = \xi(\tau_0, \dots, \tau_n, t)$ – "промежуточная точка").

Б) ньютона-эрмитовского типа

$$R_n(t) = \Delta^{n+1}[x(t); t_0, t_1, \dots, t_n, t] V_{n+1}(t). \quad (5.10)$$

(Примечание 21: Кратно-интерполяционными обобщёнными полиномами занимались Хэве и Мюллер /Max Müller/ (1901-1968), но формул вида (5.6)-(5.10) у них мы не обнаружили.)

3. Оптимальные узлы для кратной интерполяции, даже в классическом степенном случае, изучались лишь «при конкретизации кратностей (5.2)» (скажем, все они равны между собой, как требовал Фейер /Lipót Fejér/ (1880-1959), и т.п.). Никакие результаты на этот счёт для произвольного пространства гладких чебышёвских обобщённых полиномов нам неизвестны.

4. Добавим, что можно выписать ещё некоторые аналоги неравенств пункта IV – 4.

VI. О чебышёвском обобщённом тейлоровском разложении гладких функций

Постановку задачи чебышёвского обобщённого тейлоровского разложения гладкой функции мы приведём в случае, когда задаётся начальная точка

$$t_0 \in [a, b] \quad (6.1)$$

и относительно неё строится гладкий чебышёвский обобщённый полином

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i e_i(t) \in \Phi_n([a, b]), \quad (6.2)$$

аппроксимирующий функцию

$$x(t) \in C^{(n)}([a, b]) \quad (6.3)$$

с реализацией равенств

$$\phi_n^{(j)}(t_0) = x^{(j)}(t_0) \quad (j=0, 1, \dots, n). \quad (6.4)$$

Однозначное существование такого «регулярного члена» чебышёвского обобщённого тейлоровского разложения для функции $x(t)$ в пространстве $\Phi_n([a, b])$ также гарантировано общими свойствами гладких чебышёвских систем.

1. Для чебышёвского обобщённого полинома $\phi_n(t)$ тогда справедливы два основных представления:

А) лагранжа-тейлоровского типа

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^n U_j(t; t_0) x^{(j)}(t_0). \quad (6.5)$$

Б) ньютона-тейлоровского типа

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^n V_j(t; t_0) D_j[x(t_0)]. \quad (6.6)$$

(Примечание 22: В классическом степенном случае формы записи (6.5)-(6.6) совпадают между собой, давая, для соответствующего многочлена $\varphi_n(t)$, единое соотношение

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{(t-t_0)^j}{j!} x^{(j)}(t_0), \quad (6.5'-6.6')$$

то есть известное выражение для «регулярного члена» тейлоровского разложения функции $x(t)$.)

2. Для погрешности (при $x(t) \in C^{(n+1)}([a, b])$)

$$R_n(t) = x(t) - \phi_n(t) \quad (6.7)$$

в этом случае будут справедливы следующие два основных представления:

А) дифференциального типа

$$R_n(t) = \frac{D_{n+1}[x(\xi_t)]}{D_{n+1}[e_{n+1}(\xi_t)]} K_{n+1}(t; t_0). \quad (6.8)$$

Б) интегрального типа

$$R_n(t) = \int_{t_0}^t K_n(t, s) D_{n+1}[x(s)] ds. \quad (6.9)$$

(Примечание 23: В классическом степенном случае формулы вида (6.8)-(6.9) для «остаточного члена» тейлоровского разложения известны ещё из работ Коши. В случае произвольного линейного пространства гладких чебышёвских обобщённых полиномов $\Phi([a, b])$ получением выражений для «остаточного члена» обобщённого тэйлоровского разложения гладких функций занимались Карлин, его ученики Стадден /William Studden (1935-2013), Миччелли /Charles Micchelli/ (р. 1946) и другие, а также Ионеску /Dumitru Ionescu/ (1901-1985), но формул вида (6.8)-(6.9) в их работах мы не видели.)

3. Выбор начальной точки $t_0 \in [a, b]$ в рассмотренной ситуации «теоретически интересный вопрос», но на практике априори считается, что «вполне разумно» в качестве точки t_0 брать середину исходного отрезка $[a, b]$.

4. Добавим, что, для погрешности $R_n(t)$, можно выписать ещё и некоторые аналоги неравенств пункта IV – 4.

Завершая наш обзор отметим, что различными задачами, «связанными с чебышёвскими обобщёнными полиномами», заинтересовались, в конце XX столетия и, затем, уже в XXI столетии, Александр Алипканович Жёнсыкбаев /1947-2009/, Игорь Леонидович Шевчук /р. 1947/, Трауб /Joseph Frederick Traub/ (1932-2015), Тихмиров, его ученики Георгий Георгиевич Магарил-Ильяев /р. 1944/, Александр Савельевич Кочуров /р. 1960/ и другие математики.

On interpolation of functions by generalized polynomials constructed on the basis of smooth Tchebysheff systems

V.B. Demidovich

Abstract: We present the historically-mathematical review of results on interpolation of functions by smooth Tchebycheff Generalized polynomials.

Keywords: smooth Tchebycheff systems, generalized polynomials, interpolation.

ЛИТЕРАТУРА

А. КНИГИ

- [А-1] С.Карлин, В.Стадден «Чебышёвские системы и их применение в анализе и статистике». Москва, "Наука", 1976.
- [А-2] М.Г.Крейн, А.А.Нудельман «Проблемы моментов Маркова и экстремальные задачи». Москва, "Наука", 1973.
- [А-3] С.Н.Бернштейн «Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной». Москва-Ленинград, "ГОНТИ", 1937.
- [А-4] М.Г.Крейн, Ф.Р.Гантмахер «Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем». Москва-Ленинград, "Гостехиздат", 1937.
- [А-5] В.К.Дзядык «Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами». Москва, "Наука", 1977.
- [А-6] Н.П.Жидков «Линейные аппроксимации функционалов». Москва, "Изд -во Моск. ун -та", 1994.
- [А-7] К.И.Бабенко «Основы численного анализа». Москва, "Наука", 1986.

- [А-8] Л.Коллатц, В.Крабс «Теория приближений: чебышёвские приближения и их приложения». Москва, "Наука", 1978.
- [А-9] Н.П.Корнейчук «Точные константы в теории приближений». Москва, "Наука", 1987.
- [А-10] П.Лоран «Аппроксимация и оптимизация». Москва, "Мир", 1976.
- [А-11] С.Пашковский «Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва». Москва, "Наука", 1983.
- [А-12] Г.Полиа, Г.Сеге «Задачи и теоремы из анализа: I-II». Москва, "Наука", 1978.
- [А-13] В.Я.Ремез «Основы численных методов чебышёвского приближения». Киев, "Наукова думка", 1969.
- [А-14] А.Хаусхолдер «Основы численного анализа». Москва, "Иностранная литература", 1956.
- [А-15] М.Я.Зингер «Элементы дифференциальной теории чебышёвских приближений». Москва, "Наука", 1975.
- [А-16] А.О.Гельфонд «Исчисление конечных разностей». Москва, "Наука", 1967.
- [А-17] И.П.Натансон «Конструктивная теория функций». Москва-Ленинград, "ГИТЛ", 1949.
- [А-18] Н.И.Ахиезер «Лекции по теории аппроксимации». Москва, "Наука", 1965.
- [А-19] И.И.Ляшко, В.Л.Макаров, А.А.Скоробогатко «Методы вычислений». Киев, "Вища школа", 1977.
- [А-20] И.А.Шевчук «Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций». Киев, "Наукова думка", 1992.
- [А-21] Дж.Трауб «Итерационные методы решения уравнений». Москва, "Мир", 1985.
- [А-22] С.Качмаж, Г.Штейнгауз «Теория ортогональных рядов». Москва, "Физматгиз", 1958.
- [А-23] В.М.Тихомиров «Некоторые вопросы теории приближений». Москва, "Изд -во Моск. ун -та", 1976.
- [А-24] В.Б.Демидович «Приближённые вычисления с помощью обобщённых полиномов из чебышёвских пространств: чебышёвские обобщённые полиномы». Москва, "Изд -во Моск. ун -та", 1990.
- [А-25] В.Б.Демидович «Приближённые вычисления с помощью обобщённых полиномов из чебышёвских пространств: простое интерполирование, кратное интерполирование, формулы тейлоровского типа». Москва, "Изд -во Моск. ун -та", 1994.

Б. СТАТЬИ

- [Б-1] G.Mühlbach «A recurrence formula for generalized divided differences and some applications». J. Approx. Theory, v. 9 (1973), № 2, 165-172.
- [Б-2] I.Singer «Theoreme de medii pentru sisteme de functii». Bul. Stint. Acad. R.P.Române: sec. mat. si fiz., v. 5 (1953), № 2, 251-271.
- [Б-3] I.Singer «Despre cea mai bună aproximare a funcțiilor continue prin combinații liniare de funcții date». Bul. Stint. Acad. R.P.Române: sec. mat. si fiz., v. 6 (1954), № 3, 465-475.
- [Б-4] T.Popovičiu «Folytonos függvények középértéktételeiről». Magyar tud. Akad.mat. és fiz. oszt. Közl., v. 4 (1954), № 3, 353-356.
- [Б-5] K.Kunz «High accuracy quadrature formulas from divided-differences with repeated arguments». Math. tables and other aids comput., v. 10 (1956), № 54, 87-90.
- [Б-6] Havie Tore «Remarks on unified theory for classical and generalized interpolation and extrapolation». BIT Numerical Mathematics, (1981), № 4, 465-474.
- [Б-7] M.Müller «Über Interpolation mittels ganzer rationaler Funktionen». Math. Z., v. 62 (1955), № 3, 292-309.
- [Б-8] D.Ionescu «Generalizarea formulei lui Taylor». Gaz. mat. si fiz., v. 7 (1955), № 8, 389-395.
- [Б-9] В.Б.Демидович «Об одном обобщении классической интерполяционной формулы». Известия Академии наук Казахской ССР: серия физико-математическая, т. 5 (1984), 12-16.
- [Б-10] В.Б.Демидович, Г.Г.Магарил-Ильяев, В.М.Тихомиров «Об экстремумах линейных функционалов на конечномерных пространствах». Успехи математических наук, т. 55 (2000), № 4, 133-134 (переведена на английский: V.B.Demidovich, G.G.Magaril-Ilyayev, V.M.Tikhomirov «Extrema of linear functionals on finite-dimensional spaces». USA, «AMS, Providence, R.I., "Transl. of Math. Journals: Communications of the Moscow Mathematical Society», (2001), 1143-1144).
- [Б-11] В.Б.Демидович, Г.Г.Магарил-Ильяев, В.М.Тихомиров «Экстремальные задачи для линейных функционалов на чебышёвских пространствах». Фундаментальная и прикладная математика, т. 11 (2005), № 2, 87-100 (переведена на английский: V.B.Demidovich, G.G.Magaril-Ilyayev, and V.M.Tikhomirov «Extremal problems for linear functional on the Tchebycheff spaces». Springer International Publishing, Journal of Mathematical Sciences, v. 142 (2007), № 2, 1923-1932).
- [Б-12] В.Б.Демидович, А.С.Кочуров «О некоторых экстремальных задачах в конечно-мерных чебышёвских пространствах». Труды НИИСИ РАН, т. 4 (2014), № 2, 132-141.

Основные подходы к проектированию информационно-поисковой системы по средствам вычислительной техники и программному обеспечению

А.М. Костылёв

ФГУ «ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва, Россия,
E-mail : akostylev@niisi.msk.ru

Аннотация: В статье приведены основные подходы к проектированию информационно-поисковой системы по средствам вычислительной техники и программному обеспечению. Система должна представлять собой интерактивный интернет сайт. В системе должен быть доступен быстрый поиск информации по интернет сайту, добавление и корректировка данных. Система должна строится на основе открытого программного обеспечения.

Ключевые слова: классификация средств вычислительной техники и программного обеспечения, информационные технологии, открытое программное обеспечение, википедия.

1. Введение

Большое количество направлений деятельности разработчиков и производителей средств вычислительной техники (СВТ) и программного обеспечения (ПО) не позволяет всем заинтересованным лицам вовремя и в полном объеме получать информацию о ведущихся и законченных разработках и изделиях СВТ и ПО, а также сообщать о своих разработках, изделиях и направлениях деятельности. Информация разбросана по многочисленным источникам (презентации, справочники, отчеты, статьи и т. п.) и не структурирована. Понятие средств вычислительной техники было введено в ГОСТ 21552-84 [1], однако в этом стандарте не была проведена классификация СВТ, что не позволяет создавать крупные информационные ресурсы. Поиск сайтов, посвященных СВТ и ПО Российской разработки не дал никаких значимых результатов.

В тоже время существуют современные информационные технологии [2], позволяющие создавать эффективные информационно-поисковые системы на базе открытого программного обеспечения (ПО).

Поэтому актуальной становится задача создания информационно-поисковой системы по средствам вычислительной техники и программному обеспечению с использованием интернет технологии, аналогичной используемой в широко известной Wikipedia (Википедии) [3].

2. Структура и основные возможности информационно-поисковой системы по средствам вычислительной техники и программному обеспечению

Информационно-поисковая система должна предоставлять информацию по следующим направлениям деятельности в части средств вычислительной техники и программного обеспечения:

- интегральные микросхемы (микропроцессоры, микроконтроллеры и микросхемы повышенной стойкости);
- модули (процессорные модули, модули интерфейсов, модули электропитания и ПО модулей) и внешние устройства;
- электронно-вычислительные машины (ЭВМ) и мультипроцессорные системы обработки информации (универсальные ЭВМ, мультипроцессорные системы обработки информации, вычислительные системы цифровой обработки сигналов и т.п.)
- программное обеспечение (операционные системы, общее программное обеспечение, инструментальные средства разработки программ).

Направления разбиваются на разделы, разделы на подразделы и так далее до конкретной разработки или изделия.

По каждой конкретной разработке (изделию или программе) должна быть представлена следующая информация:

- наименование изделия или программы - полное, а также условное обозначение;

- основные технические и эксплуатационные характеристики изделия (для модулей - конструктивное исполнение);

- внешний вид изделия - (фотография или чертеж)

- общая схема функционирования (структура) изделия;

- возможность просмотра или загрузки основных документов по изделию или программе («Руководство по эксплуатации», «Указания по применению» или «Описания применения»).

Если информация по изделию или программе содержит наименование других изделий или программ, то должна быть предусмотрена возможность перехода на описание этого изделия или программы, т. е. система должна поддерживать перекрёстные ссылки.

Система должна предоставлять возможность расширения списка направлений (разделов) и списка изделий и программ, а информация по конкретному изделию или программе может быть изменена, как разработчиками системы, так и зарегистрированными пользователями, как в процессе разработки, так и в процессе эксплуатации системы.

Информационно-поисковая система в своем составе должна иметь базу данных для хранения создаваемой информации, фотографий, рисунков и документации по изделиям СВТ и ПО.

В системе не должно быть информации представляющей государственную тайну.

Доступ к информационно-поисковой системе должен быть возможен только зарегистрированным пользователям.

3. Замечания по технической реализации системы

Проектирование и разработка системы по средствам вычислительной техники и программному обеспечению должна вестись с использованием открытое программное обеспечение и в ограниченные сроки.

В качестве средств разработки может использоваться следующее свободное ПО: MediaWiki [4], DokuWiki или система контроля версий GitLab [5].

MediaWiki - написанное на PHP свободное программное обеспечение с открытым исходным кодом, реализующее гипертекстовую среду «вики» (Wiki) и изначально создававшееся в качестве «движка» Википедии. Сейчас MediaWiki используется различными проектами некоммерческого Фонда Викимедиа (Wikimedia Foundation), а также множеством других сайтов.

DokuWiki [6] - это совместимый со стандартами и лёгкий в использовании движок Wiki, предназначенный главным образом для создания различной документации. Система может быть полезна для групп разработчиков и небольших компаний. Простой, но мощный синтаксис позволяет читать файлы с данными даже без помощи Wiki и облегчает создание структурированных текстов.

GitLab - система контроля версий, имеющая Web-интерфейс и записывающая изменения в файл или набор файлов в течение большого периода времени, с возможностью вернуться к определенной версии [7]. Эта система включает в себя подсистемы, реализующие гипертекстовую среду Wiki, управление репозиториями, права доступа пользователей и подсистему непрерывного тестирования.

Использование GitLab необходимо для хранения документов и мультимедийных данных, т. к. система GitLab содержит базу данных и дает возможность контролировать любые действия разработчиков.

В качестве Wiki-движка, после многих экспериментов, была выбрана системы *DokuWiki*, как наиболее подходящая для реализации всех требований к информационно-поисковой системе. При этом данные (документы, рисунки, архивы) для Wiki-сайта загружаются из системы контроля версий - *GitLab*.

4. Заключение

В результате проектирования информационно-поисковой системы по средствам вычислительной техники и программному обеспечению была проведена классификация средств вычислительной техники и программного обеспечения, разрабатываемых на предприятиях Российской Федерации.

С использованием GitLab и DokuWiki была разработана тестовая версия системы, содержащая информацию по большому количеству (около 300) разработанных СВТ и программных изделий. На рис. 1 показан начальный экран тестовой версии системы.



Рис. 1. Начальный экран тестовой версии системы

The approach to design of the computer's hardware and software's information retrieval system

A.M. Kostylev

Abstract: The article presents the approach to design of the computer's hardware and software's information retrieval system. The system has to provide an interactive website. In the system has to be available for website quick informational search, data add and update. The system has to be based on open source software.

Keywords: computer hardware and software classification, information technologies, open source software, Wikipedia.

Литература

1. ГОСТ 21552-84. «Средства вычислительной техники. Общие технические требования, приемка, методы испытаний, маркировка, упаковка, транспортирование и хранение (с Изменениями N 1, 2, 3)».
2. Ю.А. Загоруйко. Технология разработки порталов научных знаний. «Программные продукты и системы», 2009, № 4, 25-29.
3. URL: <https://ru.wikipedia.org> (дата обращения: 02.02.2016)
4. URL: <https://www.mediawiki.org/wiki/MediaWiki> (дата обращения: 01.02.2016)
5. URL: <https://about.gitlab.com/> (дата обращения: 02.02.2016)
6. URL: <http://www.dokuwiki.ru> (дата обращения: 02.02.2016)
7. Jon Loeliger, Matthew McCullough. Version Control with Git: Powerful tools and techniques for collaborative software development, Second Edition edition, «O'Reilly Media», 2012, 456 pages, ISBN-10: 1449316387.